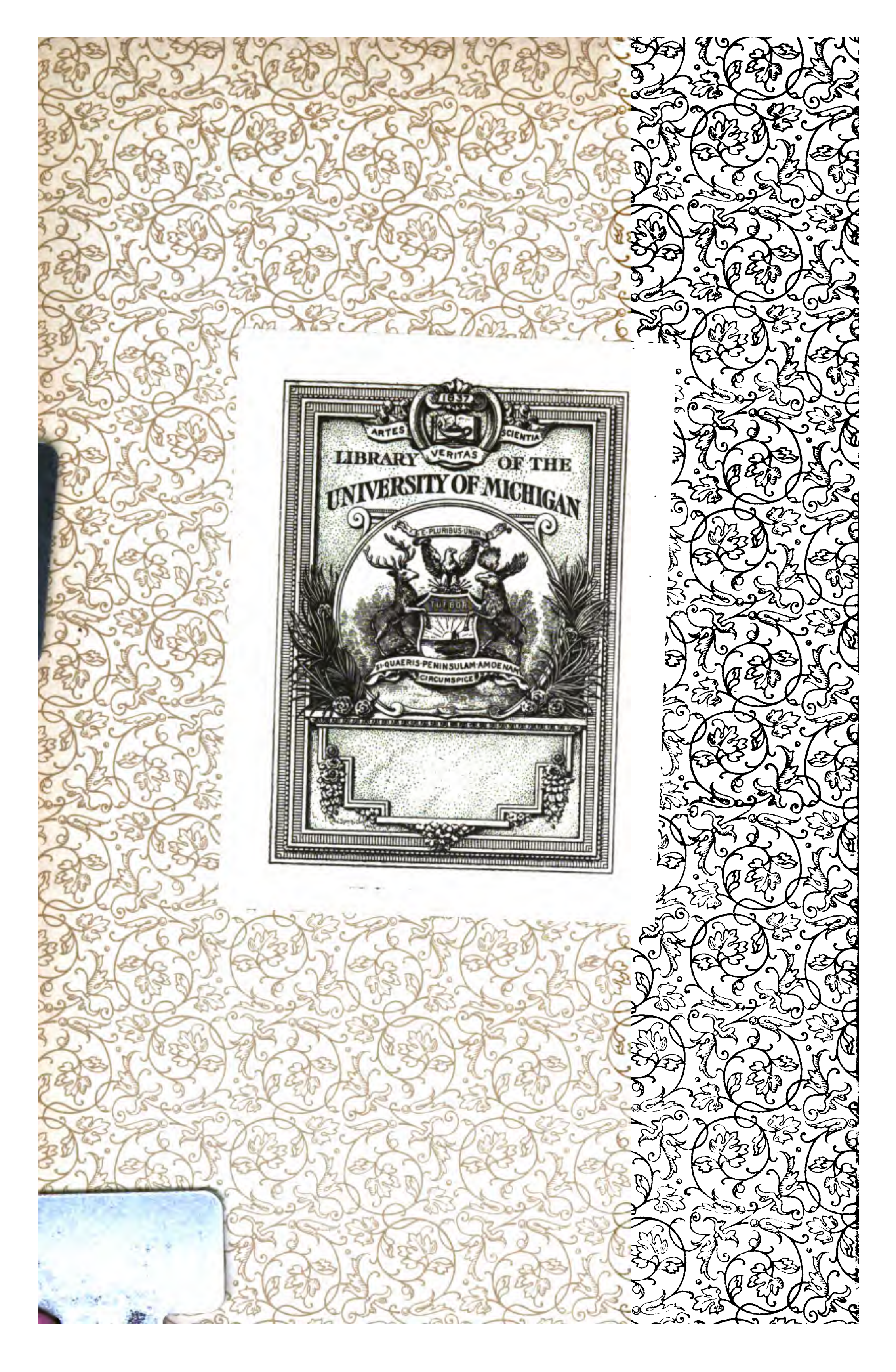

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



ALLGEMEINE THEORIE

DER

CURVEN DOPPELTER KRÜMMUNG

IN REIN GEOMETRISCHER DARSTELLUNG.

ZUR EINFÜHRUNG IN DAS STUDIUM DER CURVENTHEORIE

VON

DR. WILHELM SCHELL,

GROSSHERZOGL. BAD. GEH. HOFRATH UND PROF. AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZU KARLSRUHE.

ZWEITE, ERWEITERTE AUFLAGE.



LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1898.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN DRESDEN.

Vorwort.

Eine umfassende rein geometrische Theorie der Curven doppelter Krümmung würde folgende Hauptpunkte in Betracht zu ziehen haben.

1. Die Erzeugung der Curven als continuirliche Punktfolge einerseits und als continuirliche Folge von Ebenen andrerseits. Die Punktfolge ist der Inbegriff aller Lagen eines Punktes, welcher zwei Bedingungen genügt; ebenso ist die Ebenenfolge die Gesammtheit aller Lagen einer Ebene, welche zwei Bedingungen unterworfen ist. Diese Bedingungen sind constante Relationen der Lage des Punktes oder der Ebene gegen andere geometrische Gebilde, Punkte, Geraden, Ebenen und andere Flächen. Beide Erzeugungsarten entsprechen sich dualistisch und können mit Hülfe der Reciprocität aus einander abgeleitet werden. Bei der grossen Mannigfaltigkeit der der Curvenerzeugung zu Grunde liegenden Bedingungen ist es schwer, die Gruppen derselben zu classificiren. Indessen es können gewisse Gruppen von Ergänzungsarten herausgehoben werden. Eine solche Gruppe bilden alle Curven von der Art, dass in jede Ebene des Raumes höchstens n ihrer Punkte fallen oder durch jeden Punkt höchstens n ihrer Ebenen hindurchgehen, die Curven n^{ter} Ordnung und die n^{ter} Classe. Die geometrischen Bedingungen der Erzeugung und damit die ihrer Existenz aufzufinden, ist eine hier vorliegende Hauptaufgabe. Durch einen gewissen Grenzenübergang, nämlich für $n = \infty$, würde die erzeugende geometrische Construction zu transcendenten Curven führen. Die analytische Geometrie definirt die genannte Curvengattung durch algebraische Gleichungen; es ist aber nicht bekannt, durch welchen Grenzenübergang die Gleichungen transcendenter Curven hieraus erhalten werden können.

2. Das Studium einer gegebenen Curve im einzelnen Punkte in Bezug auf die sich ihr in diesem Punkte anschmiegenden Linien und Flächen mit Hülfe der geometrischen Methode des Unendlichkleinen, sowie das Studium der hieraus entspringenden neuen Curven und Flächen, welche die sich der Curve anschmiegenden Gebilde erzeugen, wenn der Berührungspunkt die

ganze gegebene Curve durchläuft. Diese Untersuchung ist allgemein ohne Specialisirung der gegebenen Curve zu führen und bildet den递Haupttheil der allgemeinen Theorie der Curven doppelter Krümmung. Er enthält insbesondere alles, was die Krümmung der Curven angeht.

3. Die Umkehrungsprobleme. Die unter 2. erwähnten Schmiegungselemente hängen von einander ab, und diese Abhängigkeit wechselt mit der Art der gegebenen Curve. Daher können Aufgaben gestellt werden, welche verlangen, dass Curven gesucht werden sollen, denen ein bestimmter Charakter dieser Abhängigkeit zukommt. So z. B. dass der Krümmungs- und der Schmiegungshalbmesser einer gewissen Bedingung genügen sollen.

4. Die Curvenschaar, welche durch die Bewegung der Punkte eines räumlichen Punktsystems entsteht (die Geometrie der Bewegung der Curven doppelter Krümmung).

5. Die Beziehungen der Curventheorie zur Theorie der Flächen. Eine Fläche kann auf mannigfache Art als Inbegriff aller Curven bestimmter Erzeugungsart angesehen werden. Daher gibt es auf ihr charakteristische Schaaren von Curven, wie die Krümmungslinien, die geodätischen Linien u. s. w.

6. Höhere Gebilde, welche durch Curvenschaaren entstehen, wie Curvencongruenzen und Curvencomplexe.

Das vorliegende kleine Werk beschränkt sich auf die unter 2. und 3. angedeutete allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung, ohne jedoch Andeutungen über andere der vorstehenden Probleme absichtlich zu vermeiden. Sein Ziel ist, den Hauptinhalt der heutigen Theorie rein geometrisch darzustellen, d. h. die derselben zu Grunde liegenden Gedanken möglichst klar und übersichtlich ohne Hülfe der höheren Analysis zu entwickeln. Der Verfasser hält die von ihm befolgte Methode für sehr geeignet, in das Studium der Curventheorie einzuführen; er huldigt dem von Dirichlet in seiner Gedächtnissrede auf Jacobi wiedergegebenen Ausspruche des grossen Meisters, dass es die Tendenz der neueren mathematischen Wissenschaft sei, „Gedanken an die Stelle der Rechnung zu setzen“.

Karlsruhe, den 7. November 1897.

Schell.

Inhalts-Verzeichniss.

Einleitung.

1. Ein Punktraum ist eine dreifache Mannigfaltigkeit bestimmter Structur, deren Element der Punkt ist. Ist dem Punkt keine Bedingung vorgeschrieben, der er genügen soll, so kann er jede Lage im Punktraume annehmen. Eine Bedingung beschränkt ihn auf eine zweifache Mannigfaltigkeit von Punkten, eine Fläche. Hat er zwei Bedingungen zu genügen, so ist er auf die gemeinsamen Punkte zweier Flächen, d. h. auf die einfache Mannigfaltigkeit einer Curve eingeschränkt. Eine Punktcurve kann daher definirt werden als der Ort eines Punktes, welcher zwei Bedingungen zugleich zu genügen hat. Jede Bedingung, welcher ein Punkt genügen soll, ist eine constante Relation seiner Lage gegen andere geometrische Gebilde, Punkte, Geraden, Ebenen u. s. w. Sie sagt aus, dass eine gewisse geometrische Grösse oder auch eine Verbindung mehrerer solcher, von denen die Lage des Punktes abhängt, für alle Lagen desselben constanten Werth haben soll. Eine solche Bedingung ist z. B. die, dass der Punkt constanten Abstand habe von einem gegebenen Punkte. Sie beschränkt seine Lage auf eine um diesen mit dem constanten Abstand als Radius beschriebene Kugelfläche. Der Punktraum, welchem der Ort des Punktes angehört, hat sphärische Construction um jenen Punkt und ist der Inbegriff aller den verschiedenen Werthen des constanten Abstandes entsprechenden Kugelflächen. Eine andere solche Bedingung ist die, dass die Summe der Abstände des Punktes von zwei gegebenen Punkten A und B constant bleibe; sie nöthigt den Punkt auf die Fläche eines Rotationsellipsoids um die Verbindungslinie AB der beiden Punkte als Rotationsaxe mit diesen Punkten als Brennpunkten. Der Punktraum hat hier ellipsoidische Structur und ist der Inbegriff aller Rotationsellipsoide, welche die Brennpunkte A, B haben. Er kann mit Hülfe der beiden sphärischen Räume um A und B als Mittelpunkte erhalten werden, wenn dieselben so aufeinander bezogen werden, dass jede Kugelfläche des ersten vom Radius a einer Kugelfläche des zweiten vom

Radius b entspricht, sodass $a + b = \alpha$ ist. Die Durchschnittskreise der Kugeln stehen auf AB senkrecht und bilden das der Constanten α entsprechende Rotationsellipsoid und alle den verschiedenen Werthen von α entsprechenden Ellipsoide bilden den Punktraum ellipsoidischer Structur. Weitere Bedingungen dieser Art sind die, dass das Verhältniss der Abstände des Punktes von zwei Punkten, oder zwei Ebenen, oder zwei Geraden constant sei u. s. w. — Ein Punkt, welcher den beiden Bedingungen genügt, dass die Summe seiner Abstände von zwei gegebenen Punkten A und B und zugleich das Verhältniss der Abstände von diesen Punkten constant sei, ist die Schnittcurve eines Ellipsoids mit A, B als Brennpunkten und einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt auf der Geraden AB liegt und die Strecke AB in dem gegebenen Verhältniss harmonisch theilt. In ähnlicher Weise bilden sich die Curven, deren Punkte zwei anderen der genannten Bedingungen genügen.

2. Ein Ebenenraum ist eine dreifache Mannigfaltigkeit von bestimmter Structur mit der Ebene als Element. Eine Bedingung, welche einer Ebene vorgeschrieben ist, beschränkt sie auf eine doppelte, zwei Bedingungen auf eine einfache Mannigfaltigkeit von Ebenen. Die einfache continuirliche Folge von Ebenen ist das Reciprocum zu der Punktcurve. So bilden z. B. die Tangentenebenen einer Fläche eine doppelte Mannigfaltigkeit von Ebenen. Denn in jedem Punkte der Fläche giebt es eine Tangentenebene und die Mannigfaltigkeit der Punkte einer Fläche ist eine doppelte. Soll die Ebene zwei Flächen zugleich berühren, so beschränken diese beiden Bedingungen sie auf eine einfache continuirliche Folge von Ebenen. Je zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Lagen der Ebene haben eine Gerade gemein, drei aufeinanderfolgende Ebenen bestimmen zwei Geraden, welche sich in dem gemeinsamen Schnittpunkt der drei Ebenen treffen. Die Folge dieser Geraden ist continuirlich und ebenso die Folge der Schnittpunkte derselben zu zweien und der Ebenen zu dreien. Diese Schnittpunkte bilden daher eine Punktcurve, welche auf der Ebenenfolge liegt und von deren successiven Schnittlinien berührt wird. Soll z. B. eine Ebene ein Ellipsoid und eine diesem concentrische Kugelfläche zugleich berühren, so liefert die continuirliche Folge dieser Tangentenebenen, welche alle gleichweit vom Mittelpunkte abstehen, die beiden Flächen umschriebene abwickelbare Fläche, welche das Ellipsoid längs der Poinsot'schen Polodie berührt.

3. Fallen die Punkte einer Curve sämmtlich in eine Ebene, so heisst die Curve eine ebene Curve; liegen sie auf einer Kugelfläche, Cylinderfläche oder Kegelfläche, so wird sie eine sphärische, cylindrische oder conische Curve genannt. Alle nicht ebenen Curven führen den gemeinsamen Namen der gewundenen Curven oder Curven doppelter Krümmung. Der Begriff der Curve doppelter Krümmung ist der umfassendere und schliesst den der ebenen Curve ein.

4. Die Aufgabe der Theorie der Curven ist eine doppelte. Sie umfasst 1. das Studium der Curve im einzelnen Punkte derselben und 2. das Studium ihres ganzen Verlaufes. Der erste Theil wird dadurch behandelt, dass man die Curve in jenem Punkte mit anderen geometrischen Gebilden zur Berührung bringt und aus der Lage dieser Gebilde gegen die Curve Schlüsse zieht in Bezug auf die Beschaffenheit der Curve in ihm. So studirt man die Berührung der Curve mit gewissen Linien, der Geraden, dem Kreise, der Schraubenlinie und anderen Spiralen; ebenso mit gewissen Flächen, der Ebene, der Kugel-, Kegel- und Cylinderfläche und anderen Flächen zweiter Ordnung. Der zweite Theil der Untersuchung, der den Gesammtverlauf der Curve betrifft, kann dadurch erledigt werden, dass man die Flächen und Linien studirt, welche von der Gesammtheit aller in den einzelnen Punkten der Curve construirten Geraden, Kreise, Schraubenlinien, Ebenen, Kugeln u. s. w. gebildet werden. Die gegenseitigen Beziehungen dieser neuen Flächen und Linien unter sich und zur Curve selbst sind sehr geeignet, eine deutliche Vorstellung von der Beschaffenheit der Curve in ihrem ganzen Verlaufe zu geben.

5. Auf dem hier angedeuteten Wege können die Eigenschaften der Curven, welche allen gemein sind, untersucht werden. Die speciellen Eigenthümlichkeiten gewisser Curvengattungen, der ebenen, sphärischen, conischen, cylindrischen u. s. w. Curven, überhaupt der Curven, welche auf bestimmten Flächen liegen, können aus der allgemeinen Untersuchung, durch Zufügung der speciellen Bedingungen abgeleitet werden, denen die Punkte dieser Flächen genügen. Auch die Eigenschaften der Curvensysteme, d. h. der Schaaren von Curven, die nach bestimmtem Gesetze aufeinanderfolgen, können hieraus entwickelt werden. Eine einfache continuirliche Schaar von Curven bildet eine krumme Fläche, eine Doppelschaar ein Flächensystem,

eine drei- und mehrfache Schaar bildet höhere Gebilde, deren Eigenschaften aus denen der einzelnen Curve in Verbindung mit den Gesetzen sich bilden, welchen die Folge genügt.

6. Die vorliegende Schrift begrenzt die Darstellung der Curventheorie in doppelter Hinsicht: sachlich und methodisch. Sie stellt sich die Aufgabe, die allgemeinen Eigenschaften der Curven zu entwickeln, aber Einzelnes über specielle Curvengattungen nur nach Bedürfniss zur Erläuterung der allgemeinen Theorie heranzuziehen. Sie wird auch die Erweiterung der Curventheorie zu einer Theorie der Flächen ausschliessen. Die Methode, deren wir uns zur Darstellung der Curventheorie bedienen, wird rein geometrischer Natur sein; wir werden die Curve an sich betrachten und ihre Eigenschaften nicht aus Gleichungen oder Projectionen derselben ableiten. Blos einige Sätze über unendlich kleine ebene und sphärische Dreiecke oder Sätze des geometrischen Differentiirens werden wir anwenden. Es ist unsere Absicht, bis zu einem gewissen Grade zu zeigen, wie weit die Methoden der reinen Infinitesimalgeometrie reichen. Im Interesse der rein geometrischen Einsicht in die Natur unseres Gegenstandes glauben wir die Verzichtleistung auf die ausgedehnte Anwendung der Analysis rechtfertigen zu können, sind aber geneigt, unsere Schrift als eine vielleicht nicht unzweckmässige Einleitung in die Curventheorie überhaupt zu betrachten.

Die Analysis und die Geometrie bilden heutzutage allerdings nur zwei Theile einer einzigen grossen Wissenschaft, der Theorie der continuirlichen Grösse; sie unterstützen sich gegenseitig, und weder darf der Analytiker die Hülfsmittel der Geometrie noch der Geometer die der Analysis verschmähen. Allein so wenig dem ersteren eine rein geometrische Demonstration seiner Sätze genügen kann, sowie er suchen muss, diese selbstständig zu beweisen und die Geometrie nur als Interpreten heranziehen darf, ebenso wenig kann der Geometer bei der rein analytisch geführten Untersuchung einer räumliche Gegenstände betreffenden Frage stehen bleiben, sondern er muss dahin streben, seine Sätze unabhängig von aller Rechnung zu beweisen und diese nur als eine Verification von anderer Seite zu betrachten. Den Analytikern scheint diese Ansicht geläufiger zu sein, als den Synthetikern; denn gar mancher Satz über Curven und Flächen ermangelt noch heute eines rein geometrischen Beweises. In dieser Richtung für die Theorie der Curven einen Beitrag

zu liefern, ist das Ziel dieser Schrift. Wir werden dieselbe möglichst unabhängig von der Theorie der Flächen darstellen. Blos einige allgemeine Sätze über die geradlinigen Flächen werden wir heranziehen, dieselben aber gleichfalls rein geometrisch entwickeln.

I. Capitel.

Die Curve in Verbindung mit der Geraden und Ebene. Tangente und Tangentenebenen, Normalen und Normalebene, Schmiegungsebene und Hauptnormale, rectificirende Ebene und Binomale. Ausgezeichnete Elemente der Curven.

§ 1. Tangente und Curvenelement. Die sämmtlichen Geraden, welche durch einen Punkt M einer Curve gehen, bilden ein Strahlenbündel. In diesem finden sich eine Schaar Gerader vor, von denen jede ausser durch M noch durch wenigstens einen andern Punkt der Curve geht. Diese Schaar bildet eine Kegelfläche, deren Mittelpunkt M und für welche die Curve selbst eine Leitlinie ist. Ist die Curve eben, so reducirt sich diese Fläche auf die Ebene der Curve. Durch jeden von M verschiedenen Punkt M' der Curve geht wenigstens ein Strahl MM' der Kegelfläche. Nähert sich der Punkt M' dem Punkte M und rückt er über ihn hinaus auf die andere Seite desselben, so durchschreitet der Strahl MM' eine gewisse Grenzlage. Die Gerade, welche die Grenzlage des Strahles MM' angiebt, welche dieser bei seiner Drehung um den Punkt M im Momente des Durchganges des Punktes M' durch den Punkt M erreicht, heisst die Tangente der Curve im Punkte M und der Punkt M selbst, in welchem also zwei Punkte der Curve zusammenfallen, ihr Berührungspunkt. Jeder andere Strahl MM' des Kegels, welcher wenigstens zwei nicht zusammenfallende Punkte M, M' der Curve enthält, heisst eine Secante der Curve und der Abstand MM' zweier solcher Punkte eine Sehne derselben.

Die Tangente berührt die Curve im Allgemeinen zweipunktig, d. h. sie ist eine Secante, von deren Schnittpunkten mit der Curve zwei zusammenfallen. Fallen drei oder mehrere ihrer Schnittpunkte

in eine zusammen, so wird die Berührung der Tangente mit der Curve inniger; nämlich dreipunktig oder mehrpunktig.

Wenn die Secante in die Tangente übergeht, so verschwindet die Sehne MM' zugleich mit dem Curvenbogen, der durch ihre Endpunkte geht. Bei diesem Uebergange gehen die Eigenschaften der Secante in Eigenschaften ihrer Grenze, in Eigenschaften der Tangente über. Um die näheren Umstände dieses Ueberganges deutlicher erkennen zu können, betrachtet man die Secante kurz vor ihrem Eintritt in die Tangente. Die abgekürzte Sprache der Methode des Unendlichkleinen nennt die Secante bereits in dieser Lage Tangente und sagt, die verschwindende Sehne und der verschwindende Bogen MM' seien unendlich klein. Die Tangente wird nach dieser Ausdrucksweise erklärt als die durch zwei unendlich nahe Punkte der Curve gezogene Gerade; die unendlich kleine Sehne MM' aber wird das Element der Curve im Punkte M genannt. Unter der Länge des Bogens einer Curve zwischen zwei festen Punkten M und N versteht man nämlich die Grenze, welcher sich die Summe von n Sehnen MM, $M'M''$, $M''M'''$,... $M^{(n-1)}N$, die man erhält, wenn man zwischen M und N die $n-1$ Punkte M', M'',... $M^{(n-1)}$ auf der Curve annimmt und den Punkt M mit M', M' mit M'', u. s. f. $M^{(n-1)}$ mit N durch Strecken verbindet, für wachsende n nähert. Diese Grenze wird durch ein bestimmtes Integral angegeben, dessen Elemente die Sehnen sind, welche sämmtlich verschwinden, wenn ihre Anzahl ins Unendliche wächst. Daher heisst die unendlich kleine Sehne MM' als das Element dieses Integrals, das Element des Bogens oder das Element der Curve.

§ 2. Normalen und Normalebene. Jede Gerade, welche durch den Berührungspunkt M der Tangente geht und zu dieser rechtwinklig ist, heisst eine Normale der Curve im Punkte M. Alle Normalen des Punktes M liegen in einer Ebene, welche im Berührungspunkte der Tangente senkrecht auf dieser steht, der Normalebene. Eine Curve hat in jedem Punkte im Allgemeinen eine Tangente, aber unendlich viele Normalen, welche alle in einer Ebene liegen und einen Strahlenbüschel bilden, dessen Scheitel der Curvenpunkt M ist. Umgekehrt ist es bei den Flächen. Eine Fläche hat in jedem Punkte eine Normale, aber unendlich viele Tangenten, welche im Allgemeinen alle in eine Ebene fallen, nämlich in die Tangentenebene der Fläche und unendlich viele Normalebenen,

welche einen Ebenenbüschel bilden mit der Normalen der Fläche als Axe, welcher den Strahlenbüschel der Tangenten enthält. Durch eine Curve lassen sich unzählige Flächen legen; die Tangente der Curve ist eine gemeinschaftliche Tangente aller dieser Flächen und ihre Normalen sind Normalen der Curve. Daher liegt die Tangente der Curve in den Tangentenebenen aller dieser Flächen und ist ihr gemeinsamer Durchschnitt und liegen die Normalen der Flächen alle in einer Ebene, nämlich der Normalebene der Curve. Auf einer Fläche kann man durch jeden Punkt unzählige Curven ziehen, die Tangentenebene der Fläche enthält die Tangenten aller dieser Curven und die Normalebenen aller Curven gehen durch eine Gerade, die Normale der Fläche. Die weitere Entwickelung des hier angedeuteten Dualismus zwischen Flächen und Curven hinsichtlich der zu ihnen senkrechten Ebenen und Geraden ist Gegenstand der Theorie der Flächen und nicht der Theorie der Curven.

Projicirt man von irgend einem Punkte S des Raumes aus die Curve auf irgend eine Ebene durch eine Kegelfläche, so wird die Tangente eines Punktes M der Curve durch die Tangentenebene der Kegelfläche projicirt, welche diese Fläche längs des Strahles SM berührt. Diese Ebene ist Tangentenebene an die Kegelfläche in allen Punkten dieses Strahles und enthält also die Tangenten aller Curven auf dieser Fläche in den Punkten, in welchen sie den Strahl SM schneiden. Sie enthält also auch die Tangente der Projection der Curve auf jene Ebene, denn diese ist der Schnitt des Kegels mit ihr. Daher ist die Tangente der Projection einer Curve identisch mit der Projection ihrer Tangente. Dieser Satz besteht auch noch dann, wenn die Curve statt auf eine Ebene auf irgend eine krumme Fläche projicirt wird, oder wenn der Projectionspunkt S ins Unendliche rückt, also der projicirende Kegel in einen Cylinder übergeht und selbst dann noch, wenn die Curve durch irgend eine andere geradlinige (abwickelbare oder windschiefe) Fläche projicirt wird, welche weder Kegelfläche noch Cylinderfläche ist.

§ 3. Schmiegungsebene. Jede Ebene, welche durch die Tangente eines Punktes M einer Curve geht, heisst eine Tangentenebene der Curve im Punkte M und dieser Punkt ihr Berührungspunkt. Die sämmtlichen Tangentenebenen eines Punktes bilden einen Ebenenbüschel, dessen Axe die Tangente ist. Durch jeden von M verschiedenen Punkt M'' der Curve geht wenigstens

eine Ebene dieses Büschels. Wenn ihr Durchschnitt M'' mit der Curve sich dem Berührungspunkte M nähert und über ihn hinausrückt auf die andere Seite der Curve, so durchschreitet bei diesem Durchgange die Tangentenebene eine gewisse Grenzlage. Die Ebene, welche diese Grenzlage angiebt, heisst die Schmiegungsebene (Krümmungsebene, Osculationsebene) der Curve im Punkte M und dieser ihr Berührungspunkt. Diese Ebene ist die Tangentenebene des Kegels in § 1, welche diesen längs der Tangente der Curve berührt. Da die Tangente des Punktes angesehen werden kann als die Secante, welche diesen Punkt mit einem ihm unendlich nahen Punkt M' verbindet, und da der Punkt M'', wenn er an M unendlich nahe heranrückt, auch dem Punkt M' unendlich nahe kommt, so kann die Schmiegungsebene angesehen werden als die Grenzlage einer durch M geführten Schnittebene der Curve, von deren Durchschnittspunkten mit der Curve wenigstens drei M, M', M'' in einen, M, zusammenfallen. Da die Secanten, welche durch M und M' und durch M' und M'' gehen, als Tangenten in den Punkten M, M' zu betrachten sind, so kann die Schmiegungsebene auch als die Ebene gelten, welche durch die Tangenten zweier unendlich nahen Punkte M, M' hindurchgeht.

§ 4. Hauptnormale und Binormale. Jede Tangentenebene einer Curve schneidet die Normalebene des Berührungspunktes M in einer Normalen; insbesondere schneidet die Schmiegungsebene die Normalebene in einer Normalen, welche den Namen der Hauptnormalen des Punktes M führt. Diejenige Tangentenebene, welche zur Schmiegungsebene und folglich auch zur Hauptnormalen rechtwinklig ist, heisst nach Lancret* die rectificirende Ebene und ihre Durchschnittslinie mit der Normalebene, nämlich die zur Hauptnormalen senkrechte Normale, nennen wir mit de Saint-Venant** die Binormale des Punktes M.

§ 5. Das rechtwinklige Dreikant der Curve. In jedem Punkte M einer Curve schneiden sich zufolge der §§ 1—4 drei zu einander rechtwinklige Gerade, die Tangente, die Hauptnormale und die Binormale. Sie bilden ein dreifach rechtwinkliges Dreikant und

---

* Lancret, Mém. sur les courbes à double courbure. (Mém. prés. T. I. p. 420.)

** de Saint-Venant, Mém. sur les lignes courbes non planes. (Journ. de l'école polytech. T. XVIII. p. 17.)

sind die Durchschnitte dreier gleichfalls zu einander rechtwinkliger Ebenen, der Normalebene, der Schmiegungsebene und der rectificirenden Ebene. Die Normalebene enthält die Hauptnormale und Binormale, die Schmiegungsebene die Hauptnormale und Tangente, die rectificirende Ebene die Tangente und Binormale. Lässt man diese Ebenen und Geraden in continuirlichem Zuge so an der Curve hingleiten, dass sie in jedem Punkte derselben ihren Charakter behalten, so erzeugen sie eine Reihe neuer Flächen und Curven, welche mit der primitiven Curve in sehr intimen Beziehungen stehen. Jede der drei Ebenen erzeugt nämlich eine abwickelbare Fläche, welche von ihr während der ganzen Bewegung berührt wird und jede der drei Geraden beschreibt eine gleichfalls gradlinige Fläche, welche aber nur für die Tangente eine abwickelbare ist. Die Art und Weise, wie diese Flächen sich bilden, ist folgende.

§ 6. Tangentenfläche. Es sei $M, M', M'', M''', M^{IV}, \ldots$ eine Reihe Punkte der Curve; durch je drei unmittelbar aufeinanderfolgende derselben legen wir der Reihe nach die Ebenen $MM'M''$, $M'M''M'''$, $M''M'''M^{IV}, \ldots$, welche sich aufeinanderfolgend in den Geraden $M'M''$, $M''M'''$, $M'''M^{IV}, \ldots$ schneiden. Diese Folge von Ebenen bildet eine gewisse einfache polyedrische Figur, deren Ecken auf der Curve liegen, deren Kanten die Verbindungslinien dieser Ecken, paarweise aufeinanderfolgend genommen und deren Flächen die Verbindungsebenen derselben Punkte, zu je dreien, aufeinanderfolgend genommen sind. Die gebrochene Linie $MM'M''M'''\ldots$ bildet auf diesem Polyeder eine Kantenreihe. Bilden wir nun eine neue Reihe von Punkten auf der Curve, indem wir zwischen je zwei aufeinanderfolgende der vorhandenen, je einen oder mehrere neue einschalten und construiren aus der Reihe, welche von sämmtlichen alsdann vorhandenen Punkten gebildet wird, auf dieselbe Weise, wie vorhin ein Polyeder, dann mit Hülfe einer weiteren Einschaltung von Punkten ein drittes u. s. f., so nähern sich diese Polyeder immer mehr einer krummen Fläche als Grenze. Die Kanten gehen, weil die Punkte der Curve sich immer näher rücken, in die Tangenten, die Flächen in die Schmiegungsebenen und die Kantenreihe geht in die Curve selbst über. Diese Fläche enthält die sämmtlichen Tangenten der Curve und wird längs diesen von den Schmiegungsebenen berührt; diese sind also grade Erzeugungslinien derselben. Sie enthält auch die Curve selbst, welche auf ihr eine scharfe Kante bildet und von

den Erzeugungslinien berührt wird. Die Curve selbst erscheint als Ort der Schnittpunkte dreier aufeinanderfolgender Ebenen. So gehen z. B. die Ebenen $MM'M''$, $M'M''M'''$, $M''M'''M^{IV}$ alle drei durch den Punkt M''.

Dreht man die Fläche $MM'M''$ des Polyeders um ihre Durchschnittslinie $M'M''$ mit der folgenden $M'M''M'''$ so lange um, bis sie mit dieser coincidirt, dann die so vereinigten Ebenen um den Durchschnitt $M''M'''$ mit der folgenden Ebene $M''M'''M^{IV}$ bis sie mit dieser zusammenfallen u. s. f., so wird die Oberfläche des Polyeders nach und nach zu einer Ebene ausgebreitet oder abgewickelt.

Da diese Eigenschaft von der Zahl und Lage der Seitenflächen unabhängig ist, so geht sie beim Uebergange des Polyeders in die Fläche mit auf diese über. Daher ist sie abwickelbar. Diese Fläche, deren Wendecurve oder Gratlinie (arête de rebroussement) die Curve selbst ist, soll, als der Ort aller Tangenten, die Tangentenfläche der Curve heissen. Es wird sich später zeigen, dass sie zugleich der Ort aller Filarevolventen der Curve ist. Auf den Tangentenebenen dieser Fläche stehen die Binormalen senkrecht und in diesen Ebenen liegen die Hauptnormalen der Curve.*

§ 7. Fläche der Krümmungsaxen. Die Normalebene erzeugt eine abwickelbare Fläche, die sie berührt und die wir die Fläche der Normalebenen nennen wollen. Da die Normalebenen

---

* Durch continuirliche Bewegung einer Ebene, wenn sie nicht in einer Rotation um eine Axe in ihr besteht, wird stets eine abwickelbare Fläche erzeugt. Denn wenn die bewegliche Ebene sich um einen unendlich kleinen Winkel gedreht hat, so schneidet sie in der neuen Position die vorhergehende Position längs einer Geraden, welche als Axe für diese Drehung angesehen werden kann. Ebenso schneidet sie in einer dritten Position die zweite in einer Geraden, der Axe für ein zweite unendlich kleine Drehung u. s. f. Dadurch entsteht eine continuirliche Folge von Geraden, von denen je zwei aufeinanderfolgende sich schneiden; denn sie sind die Durchschnittslinien der beweglichen Ebene mit ihrer vorhergehenden und ihrer folgenden Position und liegen also in ein und derselben Ebene. Ihr Durchschnitt ist der den drei Ebenen gemeinsame Punkt, deren Durchschnitte sie selbst sind. Die Intersectionen dieser Folge von Geraden bilden eine Curve, an welche diese Tangenten und die Folge der Ebenen Schmiegungsebenen sind. Der Ort der Geraden ist aber eine Fläche, und da sie sich schneiden, eine abwickelbare Fläche. Die bewegliche Ebene berührt diese Fläche, weil sie immer durch zwei zusammenfallende (unendlich nahe) Erzeugungslinien hindurchgeht.

zweier aufeinanderfolgender Punkte *M*, *M'* auf den Tangenten dieser Punkte und in Folge dessen auch auf der durch sie hindurchgehenden Schmiegungsebene des einen von ihnen, *M*, senkrecht stehen, so steht auch ihre Durchschnittslinie senkrecht auf dieser Ebene. Diese Durchschnittslinie ist aber die gerade Erzeugungslinie der Fläche; es hat diese Fläche mithin die Eigenschaft, dass ihre Erzeugungslinien auf den Schmiegungsebenen der Curve senkrecht stehen. Die Durchschnittslinie der Normalebene des Punktes *M* mit der Normalebene des folgenden Punktes heisst die Krümmungsaxe des Punktes *M*, weil sie mit der Krümmung der Curve in sehr genauer Beziehung steht. Daher führt die Fläche der Normalebenen auch den Namen der Fläche der Krümmungsaxen. Zwei aufeinanderfolgende Krümmungsaxen schneiden sich in einem Punkte, weil sie beide Durchschnittslinien einer Normalebene mit der ihr unmittelbar vorhergehenden und folgenden Normalebene sind. Ihr Durchschnitt ist der den drei Normalebenen gemeinsame Punkt, deren Durchschnitte sie selbst sind. Die Folge dieser Durchschnittspunkte der Krümmungsaxen bildet auf der Fläche die Gratlinie, welche von ihnen berührt wird. Die Fläche ist, wie sich zeigen wird, der Ort der Evoluten der Curve und ihre Gratlinie der Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, welche die Curve vierpunktig berühren. Ihre Erzeugungslinien laufen parallel den Binormalen und sind zu den Hauptnormalen, den Schmiegungsebenen und den Tangenten rechtwinklig; in ihre Tangentenebenen fallen die Normalen der Curve.

§ 8. Rectificirende Fläche. Die abwickelbare Fläche, welche die rectificirende Ebene erzeugt, heisst die rectificirende Fläche, weil sie, wie sich später zeigen wird, die Eigenschaft hat, durch ihre Abwickelung die Curve in eine Gerade zu verwandeln. Die Durchschnittslinie zweier aufeinanderfolgender rectificirender Ebenen ist die gerade Erzeugungslinie der Fläche und wird die rectificirende Gerade genannt. Sie ist senkrecht zu zweien aufeinanderfolgenden Hauptnormalen. Da nämlich die rectificirende Ebene senkrecht steht auf der Hauptnormalen, so ist auch jede in ihr liegende Gerade zu dieser senkrecht. Nun liegt die rectificirende Gerade gleichzeitig in zwei aufeinanderfolgenden rectificirenden Ebenen, also ist sie zu gleicher Zeit senkrecht auf den beiden aufeinanderfolgenden Hauptnormalen, zu welchen diese senkrecht sind. Die rectificirende Gerade ist wohl zu unterscheiden von der Binormalen; beide liegen in der

rectificirenden Ebene, aber die Binormale steht nur auf einer Hauptnormalen, dagegen aber noch auf der Schmiegungsebene senkrecht, während die rectificirende Gerade auf zwei Hauptnormalen, aber nicht auf der Schmiegungsebene senkrecht steht. Die rectificirende Fläche besitzt eine Gratlinie, welche von sämmtlichen rectificirenden Geraden berührt wird und deren Schmiegungsebenen die rectificirenden Ebenen sind. In diesen Ebenen liegen die Binormalen und ihnen parallel laufen die Krümmungsaxen.

§ 9. Die Flächen der Hauptnormalen und der Binormalen. Die drei Geraden, die Tangente, Hauptnormale und Binormale erzeugen drei Flächen, von denen nur die, welche die Tangente beschreibt, abwickelbar ist. Sie ist nämlich die in § 6 erwähnte Tangentenfläche der Curve. Die Fläche der Hauptnormalen, welche auch die Fläche der Krümmungshalbmesser heisst, weil diese die Richtung der Hauptnormalen haben, wie sich im Verlaufe zeigen wird, ist windschief. Es liegen nämlich die Hauptnormalen zweier aufeinanderfolgender Punkte M, M' in zwei verschiedenen Ebenen, nämlich den Schmiegungsebenen $MM'M''$ und $M'M''M'''$ dieser Punkte und gehen nicht durch denselben Punkt der Durchschnittslinie $M'M''$ dieser, der Tangente in M', folglich fallen sie nicht in dieselbe Ebene, mithin schneiden sie sich nicht und erzeugen also eine windschiefe gradlinige Fläche. Sie können daher auch nicht Tangenten einer Curve, d. h. Verbindungslinien aufeinanderfolgender Punkte derselben sein. Nur in einem Falle erleidet dieser Satz eine Ausnahme, nämlich dann, wenn je zwei aufeinanderfolgende, mithin alle Schmiegungsebenen zusammenfallen. Dann ist die Curve eben, ihre Hauptnormalen fallen alle in ihre Ebene und berühren die in der Ebene der Curve liegende Evolute derselben.

Die Fläche der Binormalen ist gleichfalls windschief. Zwei aufeinanderfolgende Binormalen stehen nämlich auf zwei aufeinanderfolgenden Schmiegungsebenen senkrecht und gehen nicht beide zugleich durch denselben Punkt der Durchschnittslinie beider Ebenen oder der Tangente; sie können sich daher nicht schneiden und erzeugen folglich eine windschiefe Fläche. Nur in einem Falle geht diese Fläche in eine abwickelbare über, nämlich wenn je zwei aufeinanderfolgende Schmiegungsebenen, also alle Schmiegungsebenen zusammenfallen, d. h. wenn die Curve eben ist. Die Binormalen

werden in diesem Falle parallel und bilden eine Cylinderfläche, senkrecht zur Ebene der Curve.

§ 10. Den §§ 6—9 zufolge hat man mit einer Curve fünf Flächen in Verbindung zu denken: die Tangentenfläche, die Fläche der Normalebenen, die rectificirende Fläche, die Fläche der Hauptnormalen und die Fläche der Binormalen. Von diesen sind die drei ersten abwickelbar, die beiden letzten windschief. Die Curve selbst ist der gemeinsame Durchschnitt der Tangentenfläche, der rectificirenden Fläche und der Fläche der Hauptnormalen, während die Fläche der Normalebenen nicht durch die Curve hindurchgeht. Die drei abwickelbaren Flächen besitzen drei Gratlinien, unter denen die Curve selbst ist; sie ist nämlich die Gratlinie der Tangentenfläche.

§ 11. Specielle Fälle: ebene und sphärische Curven. Ist die Curve eben, so fallen alle Schmiegungsebenen mit der Ebene der Curve zusammen. Die Fläche der Tangenten geht über in diese Ebene; die Fläche der Normalebenen wird ein Cylinder, weil die Krümmungsaxen alle auf der gemeinsamen Schmiegungsebene aller Punkte der Curve senkrecht stehen; die Fläche der Binormalen wird gleichfalls ein Cylinder, weil die Binormalen den Krümmungsaxen parallel laufen; die rectificirende Fläche fällt mit dem Cylinder der Binormalen zusammen, denn die rectificirenden Ebenen und folglich auch die rectificirenden Geraden stehen alle auf der gemeinsamen Schmiegungsebene senkrecht und die Fläche der Hauptnormalen reducirt sich auf die Ebene der Curve, weil die Hauptnormalen alle in die Schmiegungsebenen fallen.

Ist die Curve sphärisch, so sind die Tangenten sämmtlich Tangenten an die Kugel, auf welcher die Curve liegt; mithin gehen alle Normalebenen und folglich auch alle Krümmungsaxen als deren Durchschnittslinien durch deren Mittelpunkt. Daher ist die Fläche der Normalebenen eine Kegelfläche und reducirt sich ihre Gratlinie auf einen Punkt, den Mittelpunkt der Kugel.

Ist die Curve weder eben noch sphärisch, so berühren die Krümmungsaxen alle eine Curve und bilden deren Tangentenfläche.

§ 12. Singuläre Elemente. Bewegt sich eine Gerade so, dass sie fortwährend Tangente einer Curve bleibt, so wird in jedem Momente ein anderer ihrer Punkte Berührungspunkt, d. h. der Berührungspunkt wechselt oder bewegt sich, während er die Curve beschreibt, relativ in der Geraden und ändert sich sein Abstand

von einem bestimmten Punkte der Geraden continuirlich. Diese Bewegung kann in doppeltem Sinne erfolgen, nämlich so, dass dieser Abstand wächst oder abnimmt. Ein Curvenpunkt, in welchem der die Curve beschreibende Punkt in der beweglichen Tangente den Sinn der relativen Bewegung ändert, sodass sein Abstand vom Wachsen zum Abnehmen übergeht, oder umgekehrt, heisst ein Rückkehrpunkt der Curve.

Bewegt sich eine Ebene so, dass sie fortwährend Schmiegungsebene der Curve bleibt, so wird in jedem Momente eine andere ihrer Geraden Tangente der Curve, d. h. die Tangente wechselt oder bewegt sich relativ in der Ebene und ändert sich der Winkel, den sie mit einer bestimmten Geraden der Ebene bildet, continuirlich. Diese relative Bewegung in der Ebene kann in doppeltem Sinne erfolgen, nämlich so, dass dieser Winkel wächst, oder dass er abnimmt. Eine Tangente der Curve, in welcher die bewegliche Gerade den Sinn ihrer relativen Bewegung in der Schmiegungsebene wechselt und der Winkel, den sie mit einer bestimmten Geraden dieser Ebene bildet, vom Wachsen zum Abnehmen übergeht oder umgekehrt, heisst eine Rückkehrtangente der Curve.

Die Ebene, welche als Schmiegungsebene an der Curve hingleitet, dreht sich in jedem Momente um eine andere ihrer Geraden als Tangente und ändert sich der Winkel, welchen sie mit einer bestimmten Ebene des Raumes bildet, continuirlich. Diese Bewegung kann gleichfalls in doppeltem Sinne erfolgen, nämlich so, dass dieser Winkel wächst oder abnimmt. Eine Schmiegungsebene der Curve, in welcher die mit ihr zusammenfallende bewegliche Ebene den Sinn wechselt, heisst eine Rückkehrschmiegungsebene.*

Beschreibt ein Punkt die Curve, so bewegt er sich in der Tangente und die Tangente in der Schmiegungsebene und diese im Raume, indem sie sich um die Tangente dreht, wie diese um den Berührungspunkt. In einem gegebenen Punkte einer Curve können der beschreibende Punkt, die Tangente und die Schmiegungsebene einzeln oder combinirt Rückkehrelement sein, oder nicht. Im ersten Falle findet ein momentaner Stillstand des Punktes, der Tangente oder der Schmiegungsebene statt und hat der Punkt, die Tangente oder Schmiegungsebene eine Singularität des Stationären; im letzteren

* Vgl. v. Staudt, Geometrie der Lage, § 15, Nr. 205 (S. 113).

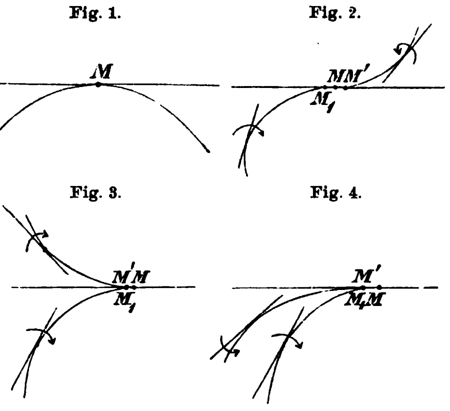
Falle ist der Punkt, die Tangente oder die Schmiegungsebene von gewöhnlicher, nicht stationärer Beschaffenheit. Da sich diese Singularitäten unter sich und mit der gewöhnlichen Beschaffenheit der Elemente verbinden können, so entspringen daraus 8 Combinationen der Beschaffenheit einer Stelle einer Curve. Bezeichnet *r*, dass ein Element, Punkt, Tangente oder Schmiegungsebene ein Rückkehrelement sei, *o* aber, dass es ein solches nicht ist, so sind diese 8 Fälle die folgenden:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Punkt:	*o*	*o*	*o*	*o*	*r*	*r*	*r*	*r*
Tangente:	*o*	*o*	*r*	*r*	*o*	*o*	*r*	*r*
Schmiegungsebene:	*o*	*r*	*o*	*r*	*o*	*r*	*o*	*r*

Für ebene Curven bleibt die Schmiegungsebene fortwährend dieselbe und hat folglich keine Singularität. Es kommen in ihr blos die Bewegung des Punktes in der Tangente und die der Tangente in der Ebene der Curve zur Geltung und hat man daher nur die 4 Combinationen:

	1.	2.	3.	4.
Punkt:	*o*	*o*	*r*	*r*
Tangente:	*o*	*r*	*o*	*r*

Im Falle 1. ist weder der Punkt, noch die Tangente singulär; die Nachbarpunkte des Berührungspunktes M der Tangente fallen auf dieselbe Seite dieser (Fig. 1). Im Falle 2. wechselt die Tangente den Sinn, während die Bewegung des Punktes in der Tangente nicht umkehrt; die Tangente ist stationär und fällt der vorhergehende Punkt M_1, und der folgende M' mit M in gerade Linie; die Nachbartheile der Curve liegen auf entgegengesetzten Seiten der Rückkehrtangente (Fig. 2). Im Falle 3. ist der Punkt ein Rückkehrpunkt und bildet die Curve in ihm eine Spitze erster Art; die Nachbartheile der Curve fallen auf entgegengesetzte Seiten der Tangente (Fig. 3). Im Falle 4. bildet



die Curve eine Spitze zweiter Art (Schnabelspitze); die Nachbartheile der Curve liegen auf derselben Seite der Rückkehrtangente (Fig. 4).

Für die Curven doppelter Krümmung combiniren sich diese vier Gattungen mit den beiden Beschaffenheiten o, r zu den oben angeführten 8 Singularitäten. Die Fälle 1 bis 4 besitzen keinen Rückkehrpunkt, 5 bis 8 haben einen solchen. Denken wir uns die Fläche der Tangenten und führen wir in irgend einem Punkte m der Tangente des Punktes M einen ebenen Schnitt senkrecht zu dieser Tangente, so besitzt derselbe die Beschaffenheit der vier Fälle der ebenen Curve. Die Figuren 1[a], 2[a], 3[a], 4[a] stellen die vier ersten Fälle 1, 2, 3, 4 dar, in welchen kein Rückkehrpunkt vorkommt, die Figuren 5, 6, 7, 8 die vier letzten, bei welchen die Curve einen Rückkehrpunkt hat.*

§ 13. Unendlich ferne Elemente. Es kann der Fall eintreten, dass ein Punkt, oder eine Tangente oder eine Schmiegungsebene der Curve ins Unendliche rückt. Entfernt sich die Schmiegungsebene ins Unendliche, so geschieht dasselbe mit der Tangente und deren Berührungspunkt; entfernt sich die Tangente ins Unendliche, so rückt auch der Berührungspunkt unendlich weit fort, ohne dass die Schmiegungsebene nothwendig dasselbe thut; rückt der Punkt der Curve ins Unendliche, so können Tangente und Schmiegungsebene

---

* Ueber die Singularitäten vergleiche man ausser v. Staudt, Geometrie der Lage § 15, Rückkehrelemente, S. 110—118:

Fiedler, W., Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. 3. Aufl. Leipzig, Teubner, 1885. II. Theil, S. 10 u. 14.

Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Leipzig, Teubner, 1884. B. I, S. 214, und Schlömilch's Zeitschr. f. Mathem. u. Physik. B. XXV.

Kneser, Synthetische Untersuchungen über die Schmiegungsebenen beliebiger Raumcurven. Mathem. Annalen, B. XXI, S. 507. — Allgemeine Sätze über die scheinbaren Singularitäten beliebiger Raumcurven. Mathem. Annalen, B. XXIV, S. 506. — Bemerkungen über die Frenet-Serret'schen Formeln und die analytische Unterscheidung rechts und links gewundener Raumcurven. Journ. f. r. u. angew. Mathem. B. 113, S. 89.

Fine, On the singularities of curves of double curvature. American Journal of Mathem. vol. VIII, p. 175 (1886).

Björling, Ueber Raumcurven-Singularitäten. Archiv f. Mathem. u. Physik, II. Reihe, B. 8, S. 83—91 (1890).

Staude, Ueber den Sinn der Windung in den singulären Punkten einer Raumcurve. American Journ. of Mathem. vol. XVII, p. 359—380 (1895).

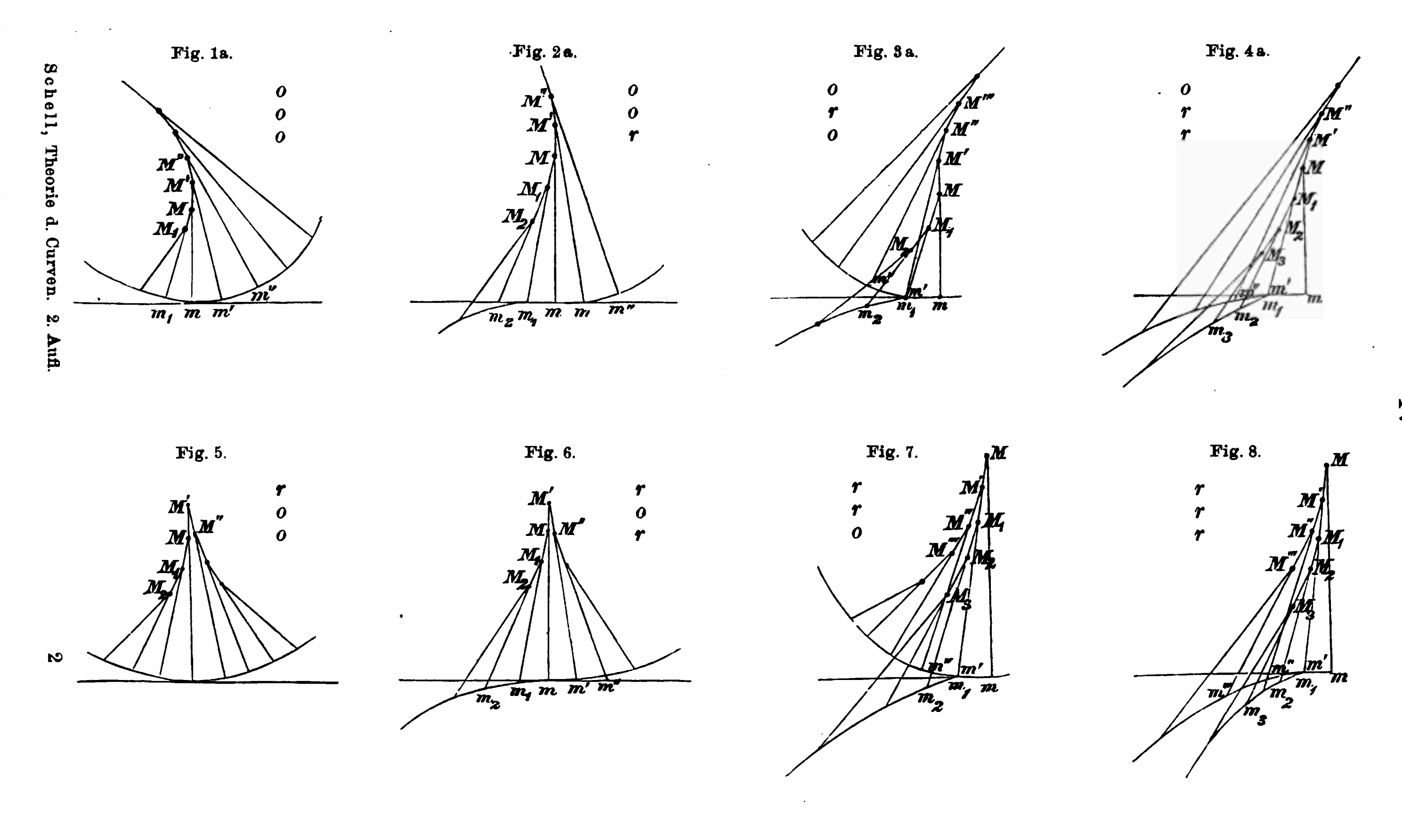


Fig. 1a.
o o o
Fig. 2a.
o o r
Fig. 3a.
o r o
Fig. 4a.
o r r
Fig. 5.
r o o
Fig. 6.
r o r
Fig. 7.
r r o
Fig. 8.
r r r

im Endlichen bleiben. Bezeichnen wir das Fortrücken eines Elementes ins Unendliche mit dem Zeichen ∞, während o die Lage desselben im endlichen Raume bedeutet, so sind folgende 3 Fälle möglich:

Punkt:	∞	∞	∞
Tangente:	∞	∞	o
Schmiegungsebene:	∞	o	o

Im ersten Falle ist die Tangente, sowie die Schmiegungsebene unbestimmt, im zweiten Falle nähert sich die Curve fortwährend einer festen Ebene, aber in dieser ist die Tangente unendlich fern, also unbestimmt, im dritten Falle nähert sich die Curve fortwährend einer festen Ebene und in dieser einer festen Geraden. Diese Ebene heisst eine Asymptotenebene und die Gerade in ihr eine Asymptote der Curve.

Jeder dieser drei Fälle kann in Verbindung mit jedem der 8 obigen Fälle eintreten, sodass also die Curve hinsichtlich ihrer unendlich fernen Elemente, wenn blos Punkte, Tangenten und Schmiegungsebenen berücksichtigt werden, 24 Arten von Eigenthümlichkeiten haben kann.

§ 14. Es giebt noch verschiedene Degenerationsfälle anderer Art. Bildet eine Curve eine Schlinge und zieht sich diese in einen Knoten* zusammen, so fallen mehrere Punkte in einen zusammen. Ein solcher Punkt heisst ein vielfacher Punkt und es giebt in ihm im Allgemeinen ebenso viel Tangenten und Schmiegungsebenen, als Punkte zusammenfallen, oft aber fallen auch mehrere dieser Elemente selbst zusammen oder werden auch wohl bestimmt.

Reducirt sich ein Curvenast auf einen Punkt (Einsiedler), so wird die Tangente und Schmiegungsebene unbestimmt.

Es kann sich die Schmiegungsebene einer bestimmten Ebene nähern mit Berührungspunkt im Endlichen; der beschreibende Punkt nähert sich dabei in immer engeren Windungen dem Berührungspunkt als Pol asymptotisch.

Auch kann die Curve in einem Punkte plötzlich abbrechen (Grenzpunkt).

* Ueber die Bildung von Knoten, ein Problem der Topologie, vgl.

Tait, on knots. Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Vol. XXVIII (1879), p. 145—190 (vorgelegt 1877) und Vol. XXXII (1887), p. 327—342 und p. 493—506.

Kirkmann, the enumeration, description and construction of knots of fewer than ten crossings. Transact. of the R. Soc. of Edinburgh, Vol. XXXII, p. 281—309.

Fallen mehrere der unter den acht Fällen (§ 12) verzeichneten Punkte zusammen, so erlangt ein solcher eine Combination von besonderen Eigenschaften der zusammenfallenden Punkte; einige Eigenschaften verschwinden in der Regel, indem sie sich paarweise vernichten. Fallen z. B. mehrere Rückkehrpunkte zusammen, so hängt es von der geraden oder ungeraden Beschaffenheit ihrer Anzahl ab, ob der Gesammtpunkt ein Rückkehrpunkt wird, oder nicht.

Berührt eine Tangente oder Schmiegungsebene eine Curve in 2, 3, ... Punkten, so heisst sie eine Doppeltangente, dreifache Tangente u.s.w., doppelte, dreifache Schmiegungsebene u.s.w. Eine Doppeltangente liegt in zwei Schmiegungsebenen, die auch in eine doppelte Schmiegungsebene zusammenfallen können.

§ 15. Algebraische und transcendente Curven. Man pflegt die Curven nach Ordnung und Classe einzutheilen. Eine Curve m^{ter} Ordnung ist eine solche, von deren Punkten höchstens m in einer Ebene liegen; eine Curve n^{ter} Classe eine solche, von deren Schmiegungsebenen höchstens n durch einen Punkt gehen. Curven von bestimmter Ordnung und Classe werden algebraische Curven genannt; solche von unendlich hoher Ordnung oder Classe transcendente Curven. Für die Singularitäten algebraischer Curven bestehen bestimmte Abhängigkeiten ihrer Anzahlen von einander. Dieselben wurden von Plücker und Cayley analytisch aufgestellt. Rein geometrisch sind dieselben noch nicht entwickelt; sie würden auch erst aus einer allgemeinen geometrischen Erzeugungsart der Curven m^{ter} Ordnung und n^{ter} Classe folgen. Auch der Unterschied der algebraischen und transcendenten Curven ist bis jetzt blos ein analytischer, kein rein geometrischer. Ebenso fehlt noch die Entwickelung von Grenzenübergängen, welche algebraische Curven in transcendente überführen.

II. Capitel.

Contingenzwinkel, Schmiegungswinkel, Winkel der ganzen Krümmung. Die Krümmung der Curven und ihre Radien.

§ 1. Contingenzwinkel. Der unendlich kleine Winkel, welchen die Tangente eines Punktes M der Curve mit der Tangente des folgenden Punktes M' bildet, heisst der Contingenzwinkel der

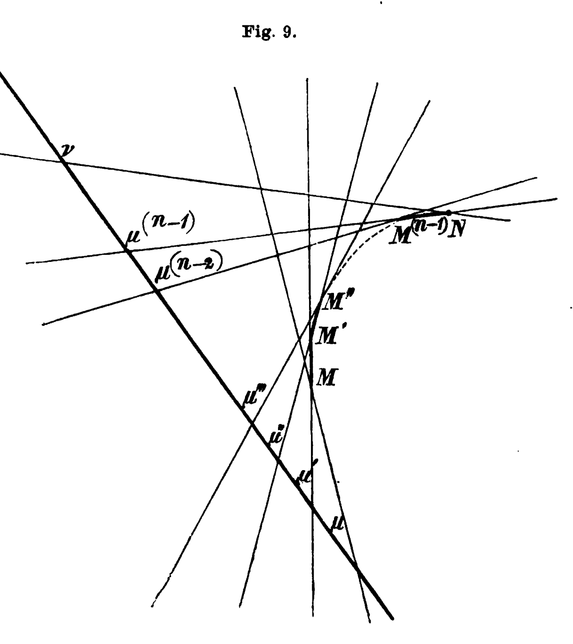
Curve im Punkte M. Er liegt in der Schmiegungsebene; er wird auch von den Normalebenen der Punkte M, M' gebildet, da diese zu den Tangenten dieser Punkte senkrecht sind. Nun sind die Normalebenen Tangentenebenen an die Fläche der Krümmungsaxen und zugleich die Schmiegungsebenen der Gratlinie dieser Fläche. Daher ist der Winkel der Schmiegungsebenen zweier aufeinanderfolgender Punkte der Gratlinie der Fläche der Krümmungsaxen gleich dem Contingenzwinkel der primitiven Curve.

Die Normalebenen der Punkte M, M' und ihre Durchschnittslinie, die Krümmungsaxe des Punktes M stehen gleichzeitig senkrecht auf der Schmiegungsebene von M, in welcher die beiden Tangenten liegen. Sie schneiden diese Ebene in zwei zu den Tangenten senkrechten Graden, welche im Durchschnitt C der Krümmungsaxe mit der Schmiegungsebene zusammenlaufen. Diese Geraden bilden mit einander den Neigungswinkel der Normalebenen, d. h. ihr Winkel ist gleich dem Contingenzwinkel. Von diesen Geraden ist aber nur die eine (MC) eine Hauptnormale, nämlich die Durchschnittslinie der Normalebene des Punktes M mit der Schmiegungsebene desselben Punktes, die andere $M'C$ nicht. Denn die folgende Hauptnormale ist die Durchschnittslinie der Normalebene des Punktes M' mit dessen Schmiegungsebene, $M'C$ ist aber die Durchschnittslinie dieser Normalebene mit der Schmiegungsebene des Punktes M. Diese Linie ist blos die senkrechte Projection der zweiten Hauptnormale auf die erste Schmiegungsebene.

§ 2. Summe der Contingenzwinkel. Es kann leicht die Summe τ der Contingenzwinkel $d\tau$ einer Curve gefunden werden, welche von den aufeinanderfolgenden Tangenten der Curve zwischen zwei festen Punkten M und N gebildet werden (Fig. 9). Schalten wir zu dem Ende $n-1$ andere Punkte $M', M'', M''', \ldots M^{(n-1)}$ zwischen M und N ein, so nähert sich die Schaar der Geraden, welche durch M und M', M' und M'', M'' und M''', u. s. f. gehen, immer mehr der Schaar der Tangenten in den Punkten $M, M'\, M'', \ldots M^{(n-1)}, N$ und die Schaar Ebenen durch $M, M', M''; M', M'', M'''; \ldots$ der Schaar der Schmiegungsebenen der Punkte von M bis N und die Winkel, welche die aufeinanderfolgenden Geraden mit einander bilden, werden die Contingenzwinkel der Punkte $M, M'\, M'' \ldots$ Letztere bezeichnen wir als Elemente der Summe τ der Reihe nach mit $d\tau, d\tau', d\tau'' \ldots d\tau^{(n-1)}$. Die dadurch entstehende Figur stellt in der Grenze den Theil der

Tangentenfläche dar, den eine bewegliche Tangente beschreibt, wenn sie aus der Lage der Tangente in M durch alle Zwischenlagen in die Tangente des Punktes N übergeht. Wickelt man nun diese Fläche ab, indem man jede Schmiegungsebene (die Ebene eines Contingenzwinkels) um die Tangente dreht, bis sie mit der folgenden Schmiegungsebene zusammenfällt, so wird dadurch weder die Grösse der Contingenzwinkel, noch die der Bogenelemente der Curve alterirt und es geht die Curve doppelter Krümmung in eine ebene Curve über, welche mit ihr gleiche Bogenelemente und gleiche Contingenzwinkel hat. Zieht man in der Ebene der abgewickelten Curve (Fig. 9) irgend eine Gerade (Transversale), welche die Tangenten der Punkte $M, M', M'' \ldots M^{(n-1)}, N$ der Reihe nach in den Punkten $\mu, \mu', \mu'', \ldots \mu^{(n-1)}, \nu$ schneidet und mit diesen die Winkel $\mu, \mu', \mu'', \ldots \mu^{(n-1)}, \nu$ bilden, so ergiebt sich jeder Contingenzwinkel als die Differenz zweier Winkel μ, welche die Transversale mit seinen Schenkeln bildet und man erhält die Gleichungen:

Fig. 9.



$$
\begin{aligned}
d\tau &= \mu' - \mu \\
d\tau' &= \mu'' - \mu' \\
d\tau'' &= \mu''' - \mu'' \\
&\vdots \\
d\tau^{(n-1)} &= \nu - \mu^{(n-1)}
\end{aligned}
$$

und durch deren Addition die Summe der Contingenzwinkel, nämlich:

$$\tau = \nu - \mu.$$

Die Punkte μ, μ', μ'' .. der Transversalen bildeten vor der Abwickelung der Tangentenfläche auf dieser eine Curve, deren Tangenten gegen die Erzeugungslinien der Fläche unter den Winkeln μ geneigt waren und durch die Abwickelung alle in eine Gerade zusammenfielen. Da die Bogenlänge dieser Curve durch die Abwickelung nicht verändert wurde und die Gerade in der Ebene eine kürzeste Linie zwischen irgend zweien ihrer Punkte ist, so folgt, dass jene Curve auf der Tangentenfläche gleichfalls eine kürzeste Linie sein muss, und da die Transversale in der Ebene ganz willkürlich war, so ergiebt sich der Satz:

Die Summe der Contingenzwinkel einer Curve doppelter Krümmung zwischen den Tangenten zweier Punkte M, N derselben ist gleich der Differenz der Winkel, welche die Tangenten irgend einer auf der Tangentenfläche gezogenen kürzesten Linie mit den Tangenten der Punkte M, N in den Punkten bilden, in welchen die kürzeste Linie letztere schneidet.*

§ 3. Krümmungskreis und Krümmung der Curve. Legt man durch die Punkte M, M', M'' einer Curve eine Ebene und construirt in dieser einen Kreis, welcher durch diese drei Punkte geht, so liegt dessen Mittelpunkt γ in dem Punkte, in welchen die Durchschnittslinie der beiden in den Mitten der Sehnen MM' und $M'M''$ senkrecht auf diesen errichteten Ebenen die Ebene der drei Punkte durchschneidet. Rücken nun die Punkte M' und M'' dem Punkte M unendlich nahe, so geht die Ebene in die Schmiegungsebene über und nimmt der Kreis und sein Mittelpunkt eine bestimmte Grösse und Lage in ihr an. Die in den Mitten der Sehnen errichteten Perpendikularebenen gehen hierbei in die Normalebenen der Punkte M, M', ihre Durchschnittslinie in die Krümmungsaxe und der Mittelpunkt des Kreises in den Durchschnitt C derselben mit der Schmiegungsebene über. Dieser Kreis, dessen Mittelpunkt C und Radius $CM = \varrho$ in

* Hieraus folgt eine allgemeine Eigenschaft der kürzesten Linien auf abwickelbaren Flächen Da für alle kürzeste Linien auf einer solchen Fläche $\mu - \nu$ constant ist, so sei $\mu' - \nu'$ die analoge Winkeldifferenz für irgend eine zweite kürzeste Linie derselben Fläche; dann ist $\mu - \nu = \mu' - \nu'$, mithin auch $\mu - \mu' = \nu - \nu'$, d. h.: Die Tangenten irgend zweier kürzesten Linien einer abwickelbaren Fläche bilden mit der Erzeugungslinie dieser Winkel μ, ν, deren Differenz für den ganzen Verlauf dieser Curven constant bleibt.

der Hauptnormale des Punktes M liegen, hat mit der Projection der Curve auf die Schmiegungsebene gleiche Krümmung und heisst der Krümmungskreis der Curve im Punkte M, sein Mittelpunkt der Krümmungsmittelpunkt und sein Radius der Krümmungshalbmesser. Aus dem unendlich schmalen Dreieck MCM' (Fig. 10), welches als rechtwinklig und gleichschenklig angesehen werden kann und in welchem die dem Winkel $C = d\tau$ gegenüberliegende Seite das Bogenelement $MM' = ds$ ist, während seine beiden anderen Seiten $MC = M'C = \varrho$ sind, ergiebt sich

Fig. 10.

$$\varrho \,.\, d\tau = ds$$

und mithin:

$$\varrho = \frac{ds}{d\tau}, \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{d\tau}{ds}.$$

Nimmt man die Krümmung eines mit der Linieneinheit beschriebenen Kreises als Einheit der Krümmung an, so verhalten sich die Krümmungen zweier Kreise umgekehrt, wie die Radien und ist der reciproke Werth des Radius das Maass der Krümmung eines Kreises. Daher ist $\frac{1}{\varrho}$ oder $\frac{d\tau}{ds}$ die Krümmung des Krümmungskreises. Man nennt diesen Ausdruck die Krümmung der Curve im Punkte M, auch wohl die erste Krümmung der Curve in diesem Punkte zum Unterschiede von einer bald zu erläuternden zweiten.

§ 4. Berührung verschiedener Ordnung zwischen Curven und Flächen, Osculation. Der Krümmungskreis hat drei aufeinanderfolgende Punkte oder, was dasselbe ist, zwei aufeinanderfolgende Bogenelemente und Tangenten mit der Curve gemein. Die Berührung zweier Curven, welche n aufeinanderfolgende (zusammenfallende) Punkte gemein haben, heisst eine n-punktige Berührung oder eine Berührung der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung. Der Krümmungskreis berührt demnach die Curve dreipunktig oder in der zweiten Ordnung. Eine Fläche berührt eine Curve n-punktig oder in der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, wenn sie mit ihr n aufeinanderfolgende Punkte gemein hat. Die Schmiegungsebene berührt demnach die Curve dreipunktig oder in der zweiten Ordnung. Der Krümmungskreis liegt in der Schmiegungsebene und berührt diese Curve in derselben Ordnung, wie diese. Dieser Satz ist ein specieller Fall des allgemeineren:

Wenn eine Fläche F eine Curve C in der n^{ten} Ordnung berührt, so kann auf der Fläche durch den Berührungspunkt keine Curve gezogen werden, welche C in einer höheren Ordnung, als der n^{ten} berührt. Denn es kann eine auf der Fläche F liegende Curve mit der Curve C nicht mehr Punkte gemein haben, als auf F liegen.

Die Berührung der zweiten Ordnung nennt man auch Osculation. Daher heissen der Krümmungskreis und die Schmiegungsebene auch osculirender Kreis und osculirende Ebene.

§ 5. Die Curve der Krümmungsmittelpunkte. Der Krümmungsmittelpunkt C des Punktes M ist der Durchschnittspunkt der Krümmungsaxe mit der Hauptnormalen dieses Punktes. Die Folge der Krümmungsmittelpunkte bildet daher eine Curve, welche auf der Fläche der Hauptnormalen und der Fläche der Krümmungsaxen liegt und mithin die Durchschnittscurve dieser beiden Flächen ist. Diese Curve wird von den Hauptnormalen nicht berührt, sondern geschnitten. (Vgl. Cap. I, § 9.)

§ 6. Schmiegungswinkel. Die Schmiegungsebenen zweier aufeinanderfolgender Punkte M, M' einer Curve bilden einen unendlich kleinen Winkel, den Schmiegungswinkel (Torsions-, Flexions- oder Windungswinkel). Da die Krümmungsaxen und Binormalen dieser Punkte auf den Schmiegungsebenen senkrecht stehen, so bilden sie mit einander denselben Winkel. Der Winkel zweier aufeinanderfolgender Krümmungsaxen ist aber der Contingenzwinkel der Gratlinie der Fläche der Krümmungsaxen und der Contingenzwinkel der primitiven Curve ist nach § 1 gleich dem Winkel zweier aufeinanderfolgender Schmiegungsebenen dieser Gratlinie; daher der Satz:

Eine Curve doppelter Krümmung und die Gratlinie der Fläche ihrer Krümmungsaxen stehen in solcher Beziehung zu einander, dass der Contingenzwinkel und Schmiegungswinkel der einen resp. dem Schmiegungswinkel und Contingenzwinkel der andern gleich ist.*

Durch Abwickelung einer abwickelbaren Fläche wird der Winkel zweier Tangentenebenen derselben oder der Schmiegungswinkel der Gratlinie dieser Fläche zerstört. Durch Abwickelung der Tangentenfläche geht daher die Curve in eine ebene Curve über, welche mit ihr gleiche Contingenzwinkel hat, durch Abwickelung der Fläche

---

* Lancret a. a. O. S. 419.

der Krümmungsaxen erhält man aus deren Gratlinie eine ebene Curve, deren Contingenzwinkel den Schmiegungswinkeln der Curve doppelter Krümmung gleich sind. Von diesen beiden ebenen Curven hat die erste mit der Curve doppelter Krümmung gleiche Bogenelemente und folglich auch gleiche Krümmungshalbmesser, das Bogenelement der zweiten ist aber im Allgemeinen nicht gleich dem Bogenelemente jener.

Die Curve und die Gratlinie ihrer Fläche der Krümmungsaxen haben noch die Beziehung zu einander, dass die Normalebenen jeder von ihnen den Schmiegungsebenen der andern parallel sind. Die Normalebene der erstern ist nämlich selbst die Schmiegungsebene der zweiten und die Normalebene dieser steht senkrecht auf der Krümmungsaxe als ihrer Tangente; auf dieser aber steht auch die Schmiegungsebene der ersteren senkrecht. Ebenso sind die Tangenten der einen Curve den Krümmungsaxen der andern, die Hauptnormalen beider aber einander selbst parallel.

§ 7. **Verschwinden des Schmiegungs- und des Contingenzwinkels.** Der Schmiegungswinkel, den wir mit $d\sigma$ bezeichnen wollen, misst in einer ähnlichen Weise die Abweichung der Curve von der Schmiegungsebene, wie der Contingenzwinkel $d\tau$ ihre Abweichung von der Tangente. Wird in einem Punkte der Curve $d\sigma = o$, so wird die Curve an dieser Stelle eben, d. h. es fallen zwei Schmiegungsebenen zusammen und fallen also 4 Punkte oder 3 Tangenten in eine Ebene. Die Schmiegungsebene berührt alsdann die Curve vierpunktig oder in der dritten Ordnung. Wird in einem Punkte der Contingenzwinkel $d\tau$ gleich Null, so wird die Curve an dieser Stelle gradlinig, d. h. es fallen drei aufeinanderfolgende Punkte in die Tangente, der Krümmungskreis geht in die Tangente über und diese berührt die Curve dreipunktig oder in der zweiten Ordnung.

§ 8. **Schmiegungshalbmesser und Schmiegung.** Construirt man ein rechtwinkliges Dreieck (Fig. 11), in welchem eine Kathete gleich dem Bogenelemente ds und der dieser gegenüberliegende Winkel gleich dem Schmiegungswinkel $d\sigma$ ist, so werden die beiden andern Seiten eine Länge r annehmen, sodass

$$r \,.\, d\sigma = ds$$

und also

$$r = \frac{ds}{d\sigma}, \quad \frac{1}{r} = \frac{d\sigma}{ds}$$

Fig. 11.

wird. Der reciproke Werth dieser Länge r misst die Krümmung eines mit ihr als Radius beschriebenen Kreises und wird das Maass

der zweiten Krümmung (Schmiegung, Flexion, Torsion oder Windung) der Curve in dem Punkte, welchem ds oder $d\sigma$ angehören, die Länge r selbst der Radius der zweiten Krümmung (Schmiegungs-, Flexions- oder Torsionsradius) jenes Punktes genannt. Weil die Curve zwei Krümmungen besitzt, heisst sie Curve doppelter Krümmung.

Denkt man sich eine Curve, welche mit der gegebenen Curve gleiches Bogenelement, zum Contingenzwinkel aber deren Schmiegungswinkel hat, so stellt deren Krümmungshalbmesser den Schmiegungsradius r dar. Da der Schmiegungswinkel dieser Curve hierdurch noch nicht bestimmt wird, so giebt es unzählig viele Curven, welche dieser Bedingung genügen, keine von ihnen ist identisch mit der Gratlinie der Fläche der Krümmungsaxen, aber eine ist darunter, deren Schmiegungswinkel gleich dem Contingenzwinkel der gegebenen Curve ist. Diese Curve hat mit der gegebenen reciproke Krümmungen. Wir werden später an der Fläche der Tangenten und der Fläche der Binormalen zwei geometrische Interpretationen des Schmiegungsradius entwickeln.

§ 9. Summe der Schmiegungswinkel. Da der Schmiegungswinkel gleich dem Contingenzwinkel der Gratlinie auf der Fläche der Krümmungsaxen ist, so kann die Summe σ der Schmiegungswinkel $d\sigma$, d. h. der Winkel, welche die Schmiegungsebenen aller Punkte der Curve zwischen zwei festen Punkten M, N mit einander bilden, in ähnlicher Weise gefunden werden, wie wir in § 2 die Summe der Contingenzwinkel $d\tau$ gefunden haben. Man kann aber auch direct ihre Summe finden. Nach einem Satze der Elementargeometrie ist die doppelte Summe der Winkel A, B, C einer dreiflächigen Ecke weniger dem vierfachen körperlichen Raume E der Ecke selbst gleich dem vollen körperlichen Winkel Ω, nämlich:

$$2(A+B+C)-4E=\Omega.$$

Ist nun A' der Nebenwinkel von A, also $A'+A=\frac{1}{2}\Omega$, so kommt, wenn man dies einsetzt,

$$B+C=2E+A'$$

und mithin wird

$$C=2E+A'-B,$$

d. h. ein Winkel einer körperlichen Ecke ist gleich der Differenz zwischen einem der Winkel an der Gegenseite und dem diesem nicht

anliegenden Aussenwinkel, vermehrt um den doppelten Inhalt der körperlichen Ecke.

Schneiden wir nun das System der Schmiegungsebenen der Punkte $M, M', M'', \ldots M^{(n-1)}, N$ mit irgend einer Ebene, welche mit diesen der Reihe nach die Winkel $\mu, \mu', \mu'', \ldots \nu$ bildet und bezeichnen die körperlichen Ecken, welche von je zwei aufeinanderfolgenden Schmiegungsebenen und der Schnittebene gebildet werden, der Reihe nach mit $d\varepsilon, d\varepsilon', d\varepsilon'', \ldots d\varepsilon^{(n-1)}$ sowie die Schmiegungswinkel selbst mit $d\sigma, d\sigma', d\sigma'', \ldots d\sigma^{(n-1)}$, so erhält man nach dem angeführten Satze:

$$\begin{aligned}
d\sigma &= 2d\varepsilon + \mu' - \mu \\
d\sigma' &= 2d\varepsilon' + \mu'' - \mu' \\
d\sigma'' &= 2d\varepsilon'' + \mu''' - \mu'' \\
&\vdots \\
d\sigma^{(n-1)} &= 2d\varepsilon^{(n-1)} + \nu - \mu^{(n-1)},
\end{aligned}$$

mithin durch Addition, wenn wir noch die Summe der Schmiegungswinkel mit σ und die der körperlichen Ecken mit E bezeichnen:

$$\sigma = 2E + (\nu - \mu).$$

Darin bedeutet nun E den körperlichen Raum der von den Schmiegungsebenen in M und N, von dem zwischen ihnen liegenden Theile der Tangentenfläche und der Schnittebene gebildeten krummflächigen Ecke. Daher der Satz:

Die Summe der Schmiegungswinkel, welche die Schmiegungsebenen aller zwischen zwei festen Punkten M, N einer Curve doppelter Krümmung bilden, ist gleich der Differenz der Winkel, welche die Schmiegungsebenen in M und N mit irgend einer Schnittebene bilden, vermehrt um den doppelten körperlichen Raum der von diesen drei Ebenen und dem zwischen den Schmiegungsebenen liegenden Theile der Tangentenfläche gebildeten krummflächigen Ecke.

§ 10. Lancret's Satz. Die Hauptnormalen oder Krümmungshalbmesser zweier aufeinanderfolgender Punkte M, M' der Curve kreuzen sich unter einem unendlich kleinen Winkel, den wir den Winkel der ganzen Krümmung im Punkte M nennen wollen. Dieser Winkel wird auch gebildet von den rectificirenden Ebenen

dieser Punkte, welche auf den Hauptnormalen senkrecht stehen, und da diese Ebenen Tangentenebenen der rectificirenden Fläche und also auch Schmiegungsebenen ihrer Gratlinie sind, so ist er auch dem Schmiegungswinkel der Gratlinie der rectificirenden Fläche gleich. Der Winkel der ganzen Krümmung hängt ab vom Contingenzwinkel und vom Schmiegungswinkel und es besteht zwischen diesen Winkeln die wichtige, von Lancret aufgefundene Relation:*

Das Quadrat des Winkels der ganzen Krümmung ist gleich der Summe der Quadrate des Contingenzwinkels und des Schmiegungswinkels.

Zum Beweise dieses Satzes legen wir durch vier aufeinanderfolgende Punkte M, M', M'', M''' der Curve (Fig. 12) die beiden Schmiegungsebenen der Punkte M und M', nämlich die Ebenen $MM'M''$ und $M'M''M'''$, welche sich in der Tangente $M'M''$ schneiden und mit einander den Schmiegungswinkel $d\sigma$ bilden. Die Normalebene des Punktes M' schneidet diese beiden Ebenen in zwei Geraden $M'C, M'C'$, welche senkrecht zur Tangente $M'M''$ sind und also mit einander den Winkel $d\sigma$ bilden. Von diesen beiden Linien ist $M'C'$, welche in der Schmiegungsebene des Punktes M' liegt, die Hauptnormale dieses Punktes, die andre $M'C$ ist, da die Normalebene von M' auch auf der Schmiegungsebene von M senkrecht steht, die rechtwinklige Projection von $M'C'$ auf die Schmiegungsebene von M. Diese Linie $M'C$ schneidet sich mit der Hauptnormalen MC des Punktes M im Krümmungsmittelpunkte C und bildet mit ihr einen Winkel gleich dem Contingenzwinkel $d\tau$. Ziehen wir daher durch M' in der Schmiegungsebene von M mit der Hauptnormalen MC eine Parallele $M'\gamma$, so bildet sie mit $M'C$ gleichfalls den Winkel $CM'\gamma = d\tau$, und da sie die Richtung der ersten Hauptnormalen hat, so ist der Winkel $\gamma M'C'$, den sie mit der Hauptnormalen $M'C'$ des Punktes M' bildet, der Winkel dk beider Hauptnormalen oder der Winkel der ganzen Krümmung. Die drei im Punkte M' sich schneidenden Geraden $M'C, M'C', M'\gamma$ bilden eine an der Kante $M'C$ rechtwinklige

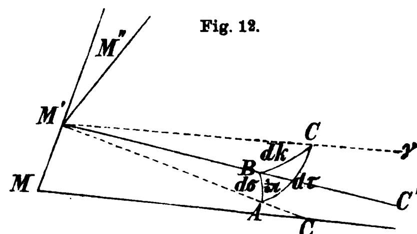


Fig. 12.

* Lancret a. a. O. S. 430.

dreiflächige Ecke, deren ebene Winkel $d\sigma$, $d\tau$ und dk sind, wovon dk dem rechten Winkel gegenüberliegt. Beschreiben wir jetzt um den Punkt M' als Mittelpunkt mit der Linieneinheit als Radius eine Kugel, so erzeugt die dreiflächige Ecke auf ihr ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck, ABC, dessen drei Seiten $d\tau$, $d\sigma$, dk unendlich klein sind. Dies Dreieck ist folglich als eben anzusehen und daher hat man nach dem pythagorischen Satze:

$$dk^2 = d\sigma^2 + d\tau^2.$$

Den obigen Bemerkungen zufolge kann dieser Satz auch so ausgesprochen werden:

Das Quadrat des Schmiegungswinkels der Gratlinie auf der rectificirenden Fläche ist gleich der Quadratsumme des Contingenzwinkels der Curve und des Contingenzwinkels der Gratlinie der Fläche der Krümmungsaxen.

Aus diesem Satze folgt unmittelbar auch noch der folgende:

Bei keiner Curve doppelter Krümmung kann der Winkel der ganzen Krümmung kleiner als der Contingenzwinkel oder kleiner als der Schmiegungswinkel sein.

Ist die Curve eben, so ist der Schmiegungswinkel Null und der Winkel der ganzen Krümmung gleich dem Contingenzwinkel.

§ 11. Radius der ganzen Krümmung. Der Winkel dk der ganzen Krümmung misst die Abweichung zweier Hauptnormalen von einander und in gewissem Sinne die schraubenartige Windung der Curve. Bestimmt man nun ähnlich, wie in § 8, eine Länge R so, dass

$$R \,.\, dk = ds,$$

also

$$R = \frac{ds}{dk}, \quad \frac{1}{R} = \frac{dk}{ds}$$

wird, so soll der reciproke Werth von R das Maass der ganzen Krümmung der Curve im Punkte M, an welchem das Bogenelement ds liegt oder auch kurz die ganze Krümmung der Curve im Punkte M, die Strecke R aber der Radius der ganzen Krümmung heissen. R würde der Krümmungshalbmesser einer Curve sein, welche bei gleichem Bogenelemente mit der gegebenen Curve den Winkel dk zum Contingenzwinkel oder der Schmiegungsradius einer anderen Curve sein, welche bei demselben Bogenelemente den Winkel dk zum Schmiegungswinkel hätte.

Der Radius R der ganzen Krümmung steht mit dem Krümmungsradius ϱ und dem Schmiegungsradius r in einer sehr einfachen Beziehung, nämlich:

Das Quadrat des reciproken Werthes vom Radius der ganzen Krümmung ist gleich der Quadratsumme der reciproken Werthe des Krümmungsradius und des Schmiegungsradius. Oder auch: Das Quadrat der ganzen Krümmung ist gleich der Quadratsumme der ersten und zweiten Krümmung der Curve.

Es ist nämlich nach dem Lancret'schen Satze

$$dk^2 = d\tau^2 + d\sigma^2,$$

mithin auch, wenn man mit ds^2 dividirt:

$$\left(\frac{dk}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\tau}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2,$$

oder weil

$$\frac{1}{R} = \frac{dk}{ds}, \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{d\tau}{ds}, \quad \frac{1}{r} = \frac{d\sigma}{ds}$$

ist,

$$\left(\frac{1}{R}\right)^2 = \left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2.$$

Aus dieser Gleichung folgt noch

$$R = \frac{\varrho \,.\, r}{\sqrt{\varrho^2 + r^2}},$$

und hieraus ergiebt sich, weil sowohl

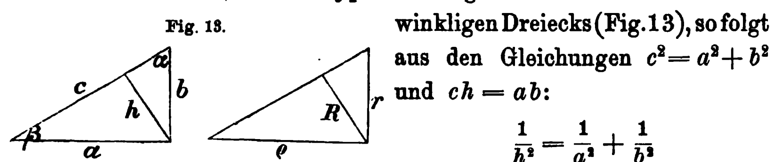
$$\frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + r^2}}, \text{ als auch } \frac{r}{\sqrt{\varrho^2 + r^2}}$$

nicht grösser als die Einheit werden kann, der Satz:

Bei keiner Curve doppelter Krümmung kann in irgend einem Punkte der Radius der ganzen Krümmung grösser sein als der Krümmungsradius oder der Schmiegungsradius.

§ 12. Das rechtwinklige Dreieck der Radien ϱ, r, R. Sind a, b, c, h die Katheten, die Hypotenuse und die vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks (Fig. 13), so folgt aus den Gleichungen $c^2 = a^2 + b^2$ und $ch = ab$:

Fig. 13.



$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

und umgekehrt, besteht diese Relation zwischen zwei Seiten a, b und der zur dritten Seite c gehörigen Höhe h, so liegt c ein rechter

Winkel gegenüber. Denn für α und β als Gegenwinkel von a und b ist $\sin\alpha = h : b$, $\sin\beta = h : a$, mithin $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1$, also $\alpha + \beta = \frac{1}{2}\pi$. Man kann diesen Satz als eine Art Reciprocum des pythagorischen Satzes ansehen. Die Relation besteht nun zwischen ϱ, r und R; construirt man daher mit ϱ und r als Katheten ein rechtwinkliges Dreieck und nennt h die Hypotenusenhöhe desselben, so folgt durch Vergleichung von

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}$$

mit derselben $h = R$. Daher:

Der Krümmungshalbmesser ϱ und der Schmiegungshalbmesser r einer Curve bilden die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenusenhöhe gleich dem Radius R der ganzen Krümmung ist.

Auch hieraus folgt, dass R weder grösser als ϱ, noch grösser als r sein kann.

Man kann dem hier aufgestellten Satze eine etwas andere Form geben. Auf jedem Radius einer Krümmung, wie $MC = \varrho$ (Fig. 13a), kann man einen Punkt C' bestimmen, sodass $MC \cdot MC' = 1$ wird. C' heisst der inverse Krümmungsmittelpunkt zu C und $MC' = \frac{1}{\varrho} = \varrho'$ stellt die Krümmung dar. Die Strecke ϱ' wird die Krümmungsstrecke genannt.* Bestimmt man nun zu ϱ, r, R die drei Krümmungsstrecken ϱ', r' R', so sind sie die Katheten und Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks und ist R' die Diagonale eines Rechtecks von den Seiten ϱ', r'.

Fig. 13a.

§ 13. Geometrische Interpretation von r und R. Man kann leicht die geometrische Bedeutung der Radien r und R

* Der Begriff des inversen Krümmungsmittelpunktes findet sich schon bei Hachette, indem er mit Hülfe desselben aus dem Meunier'schen Satze über die Krümmung der Flächenschnitte gemeinschaftlicher Tangente einen weiteren ableitete. (Vgl. Lamarle, Exposé géométrique du calcul différentiel et intégral, Paris 1861, 3ième partie, p. 445.) Unabhängig hiervon wurde der Begriff der Krümmungsstrecke von Grassmann eingeführt. (H. Grassmann, Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumcurven und krummen Flächen, Beilagen zum Progr. der latein. Hauptschule zu Halle a. S. 1886, 1888, 1893.)

mit Hülfe der Fläche der Tangenten nachweisen. Es seien (Fig. 14) MP, $M'P'$, $M''P''$,... aufeinanderfolgende Tangenten der Curve $MM'M''$... und die Ebenen $PM'P'$, $P'M''P''$ die Schmiegungsebenen derselben in den Punkten M und M'. Von einem beliebigen Punkte P der Tangente in M fällen wir auf die Tangente des folgenden Punktes M' das Perpendikel PP' oder, was wegen des unendlich kleinen Contingenzwinkels, den die beiden Tangenten einschliessen, gleichbedeutend ist, beschreiben wir aus M' als Mittelpunkt den unendlich kleinen Kreisbogen PP', der auf beiden Tangenten senkrecht steht und errichten in P die Normale auf die Ebene $PM'P'$, sowie in P' die Normale auf die Ebene $P'M''P''$. Diese beiden Normalen werden sich in einem Punkte D schneiden. Denn die Tangente $M'P'$ liegt in der Ebene $PM'P'$ und ist daher senkrecht zur Normalen PD des Punktes P, und da sie auch senkrecht zu PP' ist, so steht sie auf der Ebene DPP' senkrecht. Daher fallen alle Geraden, welche in P' auf $M'P'$ senkrecht stehen, in die Ebene DPP'. Die Normale der Ebene $P'M''P''$ in P' ist aber eine solche Gerade, da $M'P'$ auch in der Ebene $P'M''P''$ liegt. Es fallen demnach beide Normalen in P und in P', in dieselbe Ebene und scheiden sich folglich in einem Punkte D. Nun bilden diese beiden Normalen mit einander den Winkel $d\sigma$ der beiden Schmiegungsebenen $PM'P'$ und $P'M''P''$, zu denen sie senkrecht sind. Daher wird $PP' = PD \,.\, d\sigma$. Dies gilt für alle Punkte P der Tangente MP und da PP' proportional dem Abstande MP des Punktes P der Tangente vom Curvenpunkte M ist, so ist auch PD proportional MP und liegen die Punkte D, welche den verschiedenen Punkten P

Fig. 14.

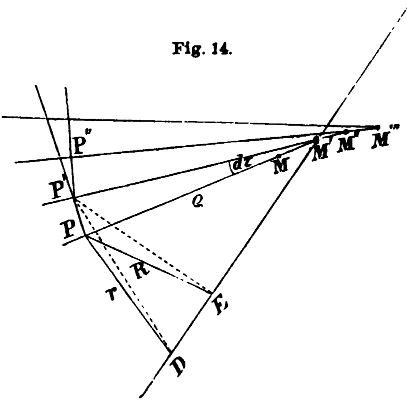
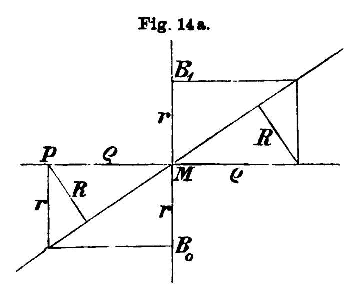


Fig. 14a.



der Tangente MP entsprechen, auf einer durch M' und also in der Grenze durch M hindurchgehenden Geraden. PP' ist das Element des senkrecht zur Tangente MP geführten Normalschnittes der Fläche der Tangenten, und da die Ebene dieses Schnittes auch durch die Normale $P'D$ hindurchgeht, so schneidet sie die Schmiegungsebenen von M und M' in zwei aufeinanderfolgenden Tangenten des Normalschnittes, welche den Winkel $d\sigma$ mit einander bilden und ist folglich $PD = PP' : d\sigma$ der Krümmungshalbmesser dieses Normalschnittes in P. Man erhält daher den Satz:

Die Krümmungsmittelpunkte D aller zur Tangente in M der Curve $MM'M''\ldots$ senkrecht geführten Normalschnitte der Tangentenfläche liegen auf einer durch M hindurchgehenden Geraden und sind die Krümmungshalbmesser dieser Normalschnitte dem Abstand von M proportional.

Nimmt man nun den Abstand $MP = \varrho$, nämlich gleich dem Krümmungshalbmesser der Curve $MM'M''\ldots$ in M, so wird $PP' = \varrho d\tau = ds = MM'$ und folglich $PD = ds : d\sigma = r$, d. h.:

Der Schmiegungshalbmesser r einer Curve $MM'M''\ldots$ in M ist der Krümmungshalbmesser des Normalschnittes der Tangentenfläche der Curve, welcher im Abstande gleich dem Krümmungshalbmesser ϱ dieser Curve vom Berührungspunkte der Tangente senkrecht zu dieser Tangente diesseits oder jenseits von M geführt werden kann.

Die Ebenen $M'PD$ und $M'P'D$ gehen durch die Tangenten MP und $M'P'$ und stehen auf den Schmiegungsebenen $PM'P'$ oder $MM'M''$ und $P'M''P''$ oder $M'M''M'''$ senkrecht, sind mithin die rectificirenden Ebenen in M und M'. Sie schneiden sich in der rectificirenden Geraden DM'. Diese Schmiegungsebenen sind Berührungsebenen der Tangentenfläche längs den Tangenten MP und $M'P'$. Ein Kegel, welcher diese beiden Tangenten zu Erzeugungslinien und längs ihnen die beiden Schmiegungsebenen zu Tangentenebenen haben würde, hätte zur Axe die rectificirende Gerade DM', M' zum Mittelpunkte und auf ihm lägen die drei Curvenpunkte M, M', M''. Er würde die Curve dreipunktig oder in der zweiten Ordnung berühren und mit der Tangentenfläche die Krümmungskreise der auf MP senkrechten Normalschnitte gemein haben.

Es liegen daher die Krümmungsmittelpunkte der Normalschnitte der Tangentenfläche der Curve $MM'M''\ldots$, welche senkrecht zur Tangente des Punktes M sind, auf der rectificirenden Geraden der Curve und ist diese Gerade die Axe eines die Curve in der zweiten Ordnung berührenden Kegels.

Da der Schmiegungswinkel $d\sigma$ der Winkel der beiden aufeinanderfolgenden Tangentenebenen dieser die Curve osculirenden Kegelfläche ist, so kann $\frac{1}{r} = \frac{d\sigma}{ds}$ nicht mit Unrecht die conische Krümmung der Curve genannt werden.*

Das zu Anfang dieses Paragraphen erwähnte rechtwinklige Dreieck, welches ϱ und r zu Katheten und R zur Hypotenusenhöhe hat, findet sich in vorliegender Betrachtung so vor, dass ϱ in die Tangente der Curve fällt, r aber parallel der Binormalen im Abstande ϱ liegt, oder auch in dieser angenommen werden kann. Dass die Höhe R dieses Dreiecks auch eine geometrische Bedeutung für die Tangentenfläche hat, wollen wir gleichfalls noch zeigen.

Das Bogenelement PP' steht senkrecht auf MP und fällt in die Schmiegungsebene $PM'P'$ des Punktes M. Es ist daher parallel zur Hauptnormalen in M. Beschreiben wir aus M' in der folgenden Schmiegungsebene $P'M''P''$ ein weiteres Bogenelement $P'P''$ senkrecht zur Tangente $M'P'$, so hat dies ebenso die Richtung der Hauptnormalen in M'. Beide Bogenelemente gehören einem ebenen Schnitt der Tangentenfläche an, welcher durch zwei Linien geführt ist, welche zwei aufeinanderfolgenden Hauptnormalen parallel laufen. Dieser Schnitt ist daher parallel der Ebene dieser Hauptnormalen und mithin senkrecht zur rectificirenden Geraden DM. Wird dieser Schnitt im Abstande ϱ von M geführt, so wird $PP' = \varrho d\tau = ds$ und ist sein Contingenzwinkel der Winkel dk der beiden Hauptnormalen oder der Winkel der ganzen Krümmung in M. Sein

---

* Der osculirende Kegel und die Darstellung der Schmiegung $1 : r$ der Curve mit seiner Hülfe findet sich bereits bei de Saint-Vénant, Mémoire sur les lignes courbes non planes. Journ. de l'école polytech. T. XVIII (30e cah.) (1845) und bei Voïzot, Note sur les courbes à double courbure. Journ. des mathém. p. Liouville T. XV, p. 481—486 (1850) und Deuxième note sur les courbes à double courbure. Ebendas. T. XVII, p. 253 bis 264 (1852).

Krümmungshalbmesser wird daher $\frac{ds}{dk} = R$, sein Krümmungsmittelpunkt E fällt in die rectificirende Gerade und liegt der Krümmungshalbmesser in der rectificirenden Ebene senkrecht gegen diese Gerade. Daher:

Der Radius R der ganzen Krümmung einer Curve ist gleich dem Krümmungshalbmesser eines Schnittes der Tangentenfläche durch einen Punkt der Tangente im Abstande gleich dem Krümmungshalbmesser ϱ, senkrecht geführt zur rectificirenden Geraden.

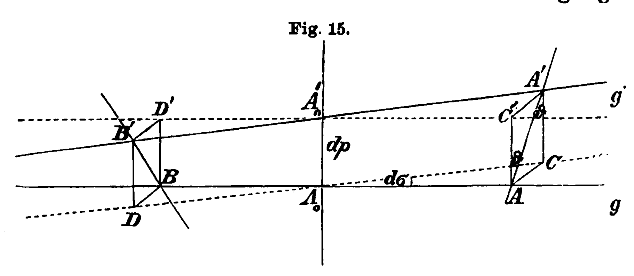
Zugleich ergiebt die Figur noch den Satz:

Die rectificirende Gerade bildet mit der Tangente der Curve einen Winkel H, wofür $tg H = r : \varrho$ und der Radius der ganzen Krümmung mit ihr der Winkel $\frac{1}{2}\pi - H$.

Die Krümmungskreise aller Schnitte der Tangentenfläche, welche durch die Punkte P der Tangente MP senkrecht zur rectificirenden Geraden geführt werden können, haben ihre Mittelpunkte auf der rectificirenden Geraden und erfüllen einen Rotationskegel, dessen Axe gleichfalls diese Gerade ist und welcher die Tangentenfläche gleichfalls längs der Tangente MP osculirt.*

§ 14. Geometrische Interpretation von r mit Hülfe der Fläche der Binormalen. Man kann für den Schmiegungsradius r

Fig. 15.



auch noch eine Bedeutung für die windschiefe Fläche der Binormalen gewinnen. Es seien g, g' (Fig. 15) zwei aufeinander folgende Ergänzungslinien einer windschiefen Fläche, dp ihr unendlich kleiner kürzester Abstand $A_0 A_0'$ und $d\sigma$ der gleichfalls unendlich kleine Winkel, unter welchem sie sich kreuzen. Die Lage der Tangentenebene in einem Punkte A von g kann leicht angegeben werden. Errichtet man nämlich in A eine Ebene senkrecht zu g, so schneidet

* Auch dieser zweite osculirende Kegel wird bei de Saint-Vénant a. a. O. erwähnt.

sie g' in einem Punkte A', sodass die Richtung AA' die einer Tangente in A an die windschiefe Fläche ist, und da g gleichfalls in die Tangentenebene von A fällt, so bestimmen AA' und g diese Tangentenebene. Zieht man durch die Fusspunkte A_0, A_0' des kürzesten Abstandes zwei Parallelen mit g' und g, so bestimmt jene zu g senkrechte Ebene auf ihnen zwei weitere Punkte C, C' eines Rechtecks $ACA'C'$, in welchem der Winkel $C'AA' = CA'A = \vartheta$ die Neigung der Tangentenebene gegen A_0A_0', d. h. gegen die Tangentenebene der Fläche in A_0 darstellt. Ist nun $A_0A = x$ der Abstand des Berührungspunktes A vom Fusspunkte A_0 des kürzesten Abstandes, so wird $tg\vartheta = AC : A'C = x\,d\sigma : dp$ und wenn man $dp : d\sigma = k$ setzt, $tg\vartheta = x : k$. Die Constante k heisst der Parameter der Erzeugungslinie g (Vertheilungsparameter der Tangentenebenen längs g). Es bedeutet k den Abstand eines Berührungspunktes A von A_0, in welchem die Tangentenebene mit der Tangentenebene von A_0 den Winkel $\vartheta = \frac{1}{4}\pi$ bildet. Die sämmtlichen Tangentenebenen in den verschiedenen Punkten A der Erzeugungslinie g bilden einen Ebenenbüschel. Die Tangentenebene in A_0, welche den kürzesten Abstand dp enthält, heisst die Centralebene und ihr Berührungspunkt A_0 der Centralpunkt der Erzeugungslinie g. Für $x = \infty$ wird $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, d. h. die Tangentenebene im unendlich fernen Punkte von g steht senkrecht auf der Centralebene. Sie heisst die Asymptotenebene von g. Dreht sich eine bewegliche Ebene um g als Axe, so ist sie in jeder Lage Tangentenebene in einem Punkte, dessen Abstand $x = k\,tg\vartheta$ ist. Für $\vartheta = o$ ist sie die Centralebene, für $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ die Asymptotenebene. Bei einem vollen Umschwung der Ebene läuft A von A_0 über die ganze Gerade g und kehrt, durch das Unendliche hindurchgehend, nach ihrem Centralpunkt A_0 zurück. Diesseits und jenseits des Centralpunktes in gleichem Abstande des Berührungspunktes A von diesem haben die Tangentenebenen entgegengesetzt gleiche Neigung gegen die Centralebene. Zu jedem Abstande $A_0A = x$ giebt es jenseits A_0 einen entgegengesetzten $-x' = -A_0A_1$, sodass die Tangentenebenen beider Punkte A und A_1 senkrecht zu einander sind. Denn es genügen x, x' den Gleichungen $x = k\,tg\vartheta$, $x' = -k\,tg\vartheta'$ und wird daher $-xx' = k^2$ für $\vartheta + \vartheta' = \frac{1}{2}\pi$. Die Tangentenebene in A_1 ist

Normalebene in A und umgekehrt. Trägt man im Centralpunkte A_0 auf $A_0 A_0'$ eine Strecke $A_0 \Sigma = k$ auf, so liefern zwei zu einander senkrechte Strecken $\Sigma A, \Sigma A_1$ des Punktes Σ die Punktpaare, wie A, A_1, deren Tangentenebenen wechselweise zugleich Normalebenen der Fläche sind, welche durch g hindurchgehen. Die Punktpaare A, A_1 bilden zwei Punktreihen auf g, welche auf entgegengesetzten Seiten des Centralpunktes liegend ein constantes Produkt k^2 ihrer Abstände von diesem zeigen. Bewegt sich der eine von ihnen auf g in einem bestimmten Sinne, so folgt ihm der andere in demselben Sinne. Die beiden Punktreihen sind gleichliegende involutorische Reihen. Ihre ideellen Doppelpunkte liegen in einem Abstande vom Centralpunkte gleich dem Paramenter k.

Nun sind die Binormalen einer Curve $MM'M''\dots$ die Erzeugungslinien einer windschiefen Fläche und ist das Bogenelement $MM' = ds$ der kürzeste Abstand derselben. Denn die Tangente ist die Schnittlinie zweier aufeinanderfolgender Schmiegungsebenen und auf diesen stehen die Binormalen in den Endpunkten des Bogenelementes senkrecht, welches die Richtung der Tangente hat. Diese beiden Binormalen bilden mit einander den Schmiegungswinkel $d\sigma$ der Schmiegungsebenen, auf denen sie senkrecht stehen. Daher ist der Parameter k der windschiefen Fläche der Binormalen $k = \frac{dp}{d\sigma} = \frac{ds}{d\sigma} = r$, d. h:

Der Schmiegungshalbmesser r der Curve ist der Parameter der Fläche der Binormalen.

In Fig. 14a stellen B_0 und B_1 die ideellen Doppelpunkte der Binormalen dar.

§ 15. Verbiegung der Curve. Die drei Winkel $d\tau, d\sigma, dk$ haben für die Erzeugung der Curve eine wichtige Bedeutung. $d\tau$ ist der Winkel, um welchen die Tangente sich drehen muss, damit die Curve sich überhaupt krümmt, $d\sigma$ der Winkel, um welchen die Schmiegungsebene sich dreht, damit die Curve statt eben, doppelt gekrümmt werde und dk ist der Winkel, um welchen sich in Folge dieser beiden Drehungen die Hauptnormale und die rectificirende Ebene drehen. Die Axen, um welche diese Drehungen erfolgen, sind: für die erste die Krümmungsaxe, für die zweite die Tangente und für die dritte die rectificirende Gerade. Führt man diese Drehungen im entgegengesetzten Sinne aus, d. h. lässt man die

Schmiegungswinkel $d\sigma$ zu Null werden, so wird die Curve eben, werden hierauf alle $d\tau = o$, so geht sie in eine Gerade über. dk wird, vermöge der Gleichung $dk^2 = d\tau^2 + d\sigma^2$ von selbst Null, wenn $d\sigma$ und $d\tau$ verschwinden.

Eine Curve doppelter Krümmung kann auf mannigfache Weise in andere Formen gebogen werden. Man kann, während man die Contingenzwinkel unverändert lässt, die Schmiegungswinkel ändern. Die abwickelbare Tangentenfläche wird dabei verbogen, aber es haben alle Formen, in welche dadurch die Curve übergeht, dieselbe Krümmung, weil die Bogenelemente nicht geändert werden. Insbesondere kann jede Curve in eine andere verbogen werden, welche constante Schmiegung hat.

Damit die Curve bestimmt sei, muss in jedem Punkte ϱ und r bekannt sein. Zwei Bedingungen zwischen diesen Grössen bestimmen daher die Curve. Diese können z. B. so sein, dass ϱ und r als Functionen des Bogens s gegeben werden, oder auch als Functionen von der Summe τ der Contingenzwinkel.

§ 16. Sphärische Hülfscurven. Beschreibt man um irgend einen Punkt des Raumes mit der Einheit als Radius eine Kugelfläche und legt durch deren Mittelpunkt eine Schaar Gerader parallel den Tangenten, eine andere parallel den Krümmungsaxen und eine dritte parallel den Hauptnormalen, so erhält man auf der Kugel drei sphärische Curven, von denen je drei ein und demselben Punkt der gegebenen Curve entsprechende Punkte ein Octantendreieck bilden.* Die Bogenelemente dieser drei Curven messen den Contingenzwinkel, den Schmiegungswinkel und den Winkel der ganzen Krümmung, also die Bogen selbst die Summen dieser Winkel. Die Ebenen durch den Mittelpunkt der Kugel und die Bogenelemente oder Tangenten derselben sind parallel der Schmiegungsebene, der Normalebene und einer Ebene parallel zwei aufeinanderfolgenden Hauptnormalen, d. h. parallel einer zur rectificirenden Geraden senkrechten Ebene, von der wir später reden werden, und die wir die Ebene der ganzen Krümmung nennen wollen, weil durch Projection der beiden Hauptnormalen auf sie der Winkel dk erhalten wird. Die Contingenzwinkel dieser drei Curven geben den Schmiegungs-

---

* Senff, theoremata principalia e theoria curvarum et superficierum. Dorpati Liviorum 1831. Cap. IV, § 2.

winkel, den Contingenzwinkel und den Winkel zweier rectificirenden Geraden, d. h. den Contingenzwinkel der Gratlinie der rectificirenden Fläche an. Von diesen sphärischen Curven kann ein sehr werthvoller Gebrauch für die Untersuchung über Curven doppelter Krümmung gemacht werden, wie P. Serret in seiner Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure, Paris 1860, und Aoust in seiner Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace, Paris 1876, gezeigt haben. Wir ziehen es vor, die allgemeinen Erörterungen an der gegebenen Curve selbst durchzuführen, statt sie von den Hülfscurven auf diese zu übertragen.

§ 17. Singularitäten der Krümmung und Schmiegung. Hat eine Curve einen ausgezeichneten Punkt, eine ausgezeichnete Tangente oder Schmiegungsebene, so hat sie an der betreffenden Stelle auch hinsichtlich der Krümmungen ausgezeichnete Eigenschaften. Ist nämlich der Punkt M_0 ein Rückkehrpunkt und man lässt eine bewegliche Tangente über die Curve hingleiten, so wird der Abstand ihres Berührungspunktes M von einem festen Punkte A in ihr ein Maximum oder Minimum, sobald M nach M_0 gelangt, weil in diesem Punkte der Punkt M den Sinn seiner Bewegung in der Tangente ändert und also die Länge AM vom Wachsen zum Abnehmen, oder umgekehrt vom Abnehmen zum Wachsen übergeht. Die Aenderung von AM ist aber das Bogenelement ds im Punkte M_0, diese muss daher gleich Null werden. Der Punkt M_0 ist ein Stillstandspunkt für die Bewegung von M in der Tangente. In ähnlicher Weise muss für eine Rückkehrtangente $d\tau$ und für eine Rückkehrebene $d\sigma$ gleich Null werden. Mit Rücksicht hierauf hat man in den acht in Cap. I § 12 verzeicheten Fällen ausgezeichneter Elemente die Krümmung und Schmiegung zu untersuchen. Für die Fälle 5., 6., 7., 8. wird $ds = 0$, für 3., 4., 7., 8. ist $d\tau = 0$, für 2., 4., 6., 8. $d\sigma = 0$. Bei 3. und 4. wird $\varrho = \infty$, bei 2. und 4. $r = \infty$. Für die Fälle 4. bis 8. sind specielle Grenzübergänge erforderlich, welche durch die Erzeugungsart der Curve sich ergeben.

Für die analytische Untersuchung dieser Fälle, wenn die Curve z. B. durch Parameterdarstellung gegeben ist, vgl.: Wölffing, Die Krümmung der Raumcurven in singulären Punkten derselben. Archiv f. Mathem. u. Physik, II Reihe, Bd. 15, S. 146—158 (1897).

III. Capitel.

Die Fläche der Schmiegungsebenen oder die Tangentenfläche und die Evolventen.

§ 1. Filarevolventen. Lässt man eine bewegliche Tangente über die Curve hingleiten, so beschreibt jeder ihrer Punkte P auf der abwickelbaren Tangentenfläche eine Curve (P), welche die sämmtlichen Tangenten unter rechten Winkeln schneidet. Berührt nämlich die Tangente im Punkte M, so geht sie zugleich durch einen folgenden, dem M unendlich nahen Punkt M' der Curve. Soll sie nun in die Lage der Tangente des Punktes M' gelangen, welche durch M' und den nächstfolgenden Punkt M'' geht, so muss sie sich in der Ebene beider Tangenten, d. h. in der Schmiegungsebene der Curve im Punkte M um den Punkt M' und zwar um den Contingenzwinkel $d\tau$ drehen. Bei dieser Bewegung beschreibt der Punkt P einen unendlich kleinen Kreisbogen PP', dessen Mittelpunkt M' und dessen Radius $M'P$ ist. Dieser Kreisbogen, welcher mit dem Bogenelemente der Curve (P) zusammenfällt, schneidet die Tangente $M'P$ des Punktes M rechtwinklig. Damit die bewegliche Gerade in die Lage einer dritten Tangente gelange, muss sie sich in der Schmiegungsebene des folgenden Punktes M' um den Punkt M'' drehen und dabei beschreibt der Punkt P' den Kreisbogen $P'P''$ vom Radius $M''P'$ um den Punkt M'' als Mittelpunkt und dieser Kreisbogen steht senkrecht auf der Tangente $M''P'$ des Punktes M' u. s. f.

Die Tangenten der Curve $MM'M''\ldots$ sind also Normalen der Curve $PP'P''\ldots$

Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Radien dieser Kreisbogen, d. h. die Differenz der Entfernungen zweier aufeinanderfolgender Punkte P, P' der Curve (P) von den ihnen entsprechenden Punkten M', M'' der ursprünglichen Curve ist gleich dem zwischenliegenden Bogenelemente dieser, nämlich:

$$M''P' - M'P = M'M'',$$

ebenso

$$M'''P'' - M''P' = M''M'''$$

u. s. f.

Es ändert sich folglich die Entfernung der entsprechenden Punkte beider Curven immer um das Bogenelement der Curve $MM'M''\ldots$ Durch Addition einer Reihe von Gleichungen der Art ergiebt sich

daher, dass die Differenz der Entfernungen irgend zweier Punkte P, Q der Curve P von den ihnen entsprechenden Punkten M, N der Curve M gleich dem zwischenliegenden Bogen MN der letzteren Curve ist.

Es möge die Curve (M) keinen Rückkehrpunkt und keine Rückkehrtangente haben. Bewegt sich alsdann die Tangente so, dass die Entfernung MP immer wächst, so nimmt sie ab, wenn sich diese im entgegengesetzten Sinne bewegt. Daher nähert sich dann der Punkt P immer mehr dem Punkte M und fällt auch an einer Stelle M_0 mit ihm zusammen. Der Punkt M_0 ist derjenige, von welchem ab gerechnet der Bogen M_0M gleich dem Radius MP des Punktes P ist. Im Punkte M_0 schneidet die Curve P die Curve (M) nicht, berührt sie auch nicht, sondern bildet eine Spitze und biegt sich von dieser aus nach der andern Seite hin ab, um sich immer weiter und weiter von der Curve (M) zu entfernen. Da dies offenbar von allen Curven (P) und allen Punkten M gilt, so erhellt, dass die sämmtlichen Curven (P) auf der Tangentenfläche eine Schaar Linien bilden, welche mit der Curve (M) je einen Punkt gemein haben, von welchem aus sie nach entgegengesetzten Seiten auf der Fläche verlaufen.

Da die Differenz zweier Radien MP immer gleich der Länge des zwischenliegenden Bogens der Curve (M) ist, so ist der grössere von ihnen gleich der Summe des kleineren und dieses Bogens. Befestigt man daher im Berührungspunkte des grösseren Radius eine biegsame Linie (einen Faden) von einer Länge gleich dieser Summe und biegt ihn allmählich so über die Curve (M) hin, dass das freie Ende immer die Richtung der Tangente an die Curve hat, so beschreibt der Endpunkt dieser Linie einen Theil der Curve (P). Dasselbe geschieht im umgekehrten Sinne, wenn man den Faden erst über die Curve M hinbiegt und darauf nach und nach so ablöst, dass das freie Endstück desselben immer Tangente an dieselbe bleibt. Weil bei diesem letzteren Vorgange die Curve (M) durch den Faden abgewickelt wird und die Curve P diese Abwickelung gewissermassen ausführt, so heisst die Curve P eine Evolvente oder auch zum Unterschiede von einer andern Art von Abwickelungscurven, eine Filarevolvente der Curve (M).

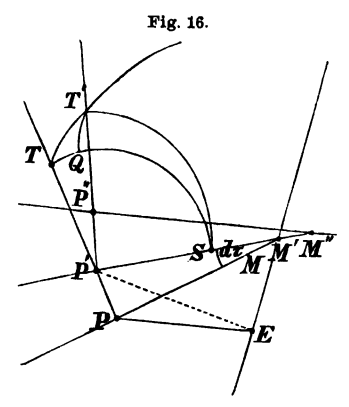
Eine Curve hat soviel Filarevolventen, als eine ihrer Tangenten Punkte hat; alle liegen auf der Tangenten-

fläche und schneiden die Tangenten sämmtlich unter rechten Winkeln. Sie bilden also das System der orthogonalen Trajectorien der Tangenten.

Die Tangentenfläche ist also zugleich die Evolventenfläche. Wickelt man sie ab, so gehen die Curven (M) und alle ihre Evolventen in ebene Curven über; die letzteren bleiben aber auch dann noch Evolventen der ersteren.

§ 2. Contingenzwinkel der Filarevolventen. Es seien $P, P' P''$ (Fig. 16) drei aufeinanderfolgende Punkte einer Filarevolvente der Curve $MM'M''\ldots$, PM, $P'M'$, $P''M''$, die durch sie hindurchgehenden Tangenten von $MM'M''\ldots$ und mithin M', M'' die beiden Punkte, aus welchen die Bogenelemente PP', $P'P''$ der Evolvente beschrieben sind. Da die Tangenten PT, $P'T'$ in den Punkten P, P' der Evolvente in die Schmiegungsebenen $PM'P'$, $P'M''P''$ der Curve (M) fallen und senkrecht zu deren Tangenten PM, $P'M'$ sind, so sind sie parallel den Hauptnormalen dieser Curve in M und M' und bilden folglich den Winkel dk dieser Hauptnormalen. Ihr Winkel ist aber der Contingenzwinkel TPT' der Evolvente. Daher:

Fig. 16.



Der Contingenzwinkel $d\tau_1$ einer Evolvente (P) der Curve (M) ist gleich dem Winkel dk der ganzen Krümmung von (M) in dem Punkte M, welcher mit dem Punkte P der Evolvente auf der Tangente von M liegt. Alle Evolventen haben in ihrem Schnittpunkte mit einer Tangente von (M) denselben Contingenzwinkel $d\tau_1 = dk$.

§ 3. Krümmungsaxe der Evolvente. Die Normalebenen der Evolvente (P) in den aufeinanderfolgenden Punkten P, P' stehen senkrecht auf den Tangenten PT, $P'T'$, und da diese in den Schmiegungsebenen von M, M' liegen, so stehen sie senkrecht auf diesen Ebenen, und da sie durch die Tangenten PM, $P'M'$ hindurchgehen, so sind sie die rectificirenden Ebenen in M, M'. Die rectificirenden Ebenen schneiden sich in der rectificirenden Geraden; die Normalebenen in der Krümmungsaxe. Daher also:

Die Krümmungsaxe der Evolvente im Punkte P, der auf der Tangente PM im Punkte M der ursprünglichen Curve liegt, ist die rectificirende Gerade der letzteren in M und diese Krümmungsaxe ist allen Punkten P derselben Tangente PM gemeinschaftlich. Die Schaar aller Evolventen einer Curve hat eine gemeinschaftliche Fläche der Krümmungsaxen und sie ist die rectificirende Fläche der Curve.

Der Krümmungsmittelpunkt der Evolvente in P ist der Fusspunkt E des von P auf die rectificirende Gerade gefällten Perpendikels PE.

Die Schmiegungsebene der Evolvente in P steht senkrecht auf der rectificirenden Geraden und ist mithin parallel der Ebene der ganzen Krümmung der ursprünglichen Curve in M.

Die hier entwickelten Resultate sind bereits in Cap. II, § 13 in veränderter Rücksicht zu Tage getreten.

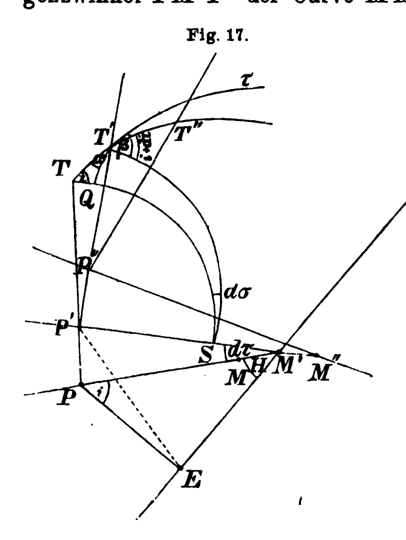
§ 4. Der Schmiegungswinkel der Evolvente. Da die Schmiegungsebene der Evolvente in P senkrecht steht auf der rectificirenden Geraden der ursprünglichen Curve in M, so bilden zwei Schmiegungsebenen, die unmittelbar aufeinanderfolgen, denselben Winkel $d\sigma_1$ mit einander, den die entsprechenden rectificirenden Geraden mit einander bilden. Nun bildet die rectificirende Gerade mit der Tangente der Curve den Winkel H, wofür $tg H = \frac{r}{\varrho}$ (s. Cap. II, § 13), und bildet die folgende rectificirende Gerade mit der folgenden Tangente den Winkel $H + dH$ und sind die Winkel $PM'E$ und $P'M'E$ einander gleich und gleich H, daher schneiden sich die beiden rectificirenden Geraden unter dem Winkel dH und erhält man den Satz:

Der Schmiegungswinkel $d\sigma_1$ einer Evolvente ist der Contingenzwinkel der Gratlinie der rectificirenden Fläche und gleich dem Differentiale des Winkels H, welchen die rectificirende Gerade mit der Tangente bildet.

Die Beziehungen der Evolventen zur rectificirenden Fläche werden wir im folgenden Capitel als Beziehungen der ursprünglichen Curve zur Fläche ihrer Evoluten wiederfinden.

§ 5. **Andere Ableitung der Resultate von §§ 2, 3, 4.** Beschreibt man (Fig. 17) um P' mit der Einheit als Radius eine Kugelfläche, so bestimmen die Tangenten $PT, P'T'$ der Evolvente $PP'P''\ldots$ und die Tangente $P'M'$ der ursprünglichen Curve $MM'M''\ldots$ auf ihr ein unendlich schmales sphärisches Dreieck $TT'S$, in welchem die Seite TT' den Contingenzwinkel $d\tau_1$ der Evolvente und die beiden andern Seiten TS und $T'S$ die Winkel $TP'S = \frac{1}{2}\pi + d\tau$ und $T'P'S = \frac{1}{2}\pi$ darstellen, wo $d\tau$ der Contingenzwinkel $PM'P'$ der Curve $MM'M''\ldots$ ist. Der verschwindende Winkel S dieses Dreiecks ist der von den beiden Schmiegungsebenen $PM'P'$ und $P'M''P''$ gebildete Schmiegungswinkel $d\sigma$ derselben. Fällt man von der Ecke T' auf die gegenüberliegende Seite TS das sphärische Perpendikel $T'Q$, so wird

Fig. 17.



$$QS = T'S = \frac{1}{2}\pi,$$
$$TQ = d\tau,$$
$$T'Q = d\sigma$$

und liefert das unendlich kleine Dreieck TQT' daher

$$d\tau_1^2 = d\tau^2 + d\sigma^2,$$

und da nach dem Lancret'schen Satze $d\tau^2 + d\sigma^2 = dk^2$ ist, so folgt, dass der Contingenzwinkel der Evolvente $d\tau_1 = dk$ ist.

Weiter folgt aus demselben Dreieck TQT' für den Winkel $T'TQ = i$, welchen die Schmiegungsebene TPT' der Evolvente mit der Schmiegungsebene TPM' der Curve $MM'M''\ldots$ bildet:

$$tg\, i = T'Q : TQ = d\sigma : d\tau$$

oder, wenn man hiermit das Bogenelement $MM' = ds$ dieser Curve verbindet:

$$tg\, i = \frac{ds}{d\tau} : \frac{ds}{d\sigma} = \varrho : r.$$

Nun war für den Winkel, welchen die rectificirende Gerade mit der Tangente der Curve $MM'M''\ldots$ bildet: $tg H = r : \varrho$. Daher ergänzen sich i und H zu $\frac{1}{2}\pi$. Zugleich ist i der Neigungswinkel

der Tangente PM' gegen die Schmiegungsebene der Evolvente. Denn fällt man von S auf TT' ein sphärisches Perpendikel k, so wird $\sin\lambda = \sin\left(\frac{1}{2}\pi + d\tau\right) . \sin i = \sin i$. Hieraus erkennt man, dass die Tangente PT der Evolvente die Projection der Tangente PM auf die Schmiegungsebene der Evolvente ist und die Schmiegungsebene der Evolvente auf der rectificirenden Geraden ME senkrecht steht.

Endlich, wenn $T'T''$ die auf TT' folgende Schmiegungsebene $T'P''T''$ der Evolvente bezeichnet, welche mit der Schmiegungsebene $T'S$ der Curve $MM'M''$ in M' den Winkel $i + di$ bildet, so wird $T''T'\tau$ der Schmiegungswinkel $d\sigma_1$ der Evolvente sein. Ist nun α der Winkel $TT'Q$ des unendlich kleinen rechtwinkligen Dreiecks, also $i + \alpha = \frac{1}{2}\pi$ und β der Winkel $ST'\tau$, welchen die zweite Schmiegungsebene der Curve $MM'M''$ (in M') mit der ersten Schmiegungsebene $TP'T'$ der Evolvente bildet, so wird $d\sigma_1 = \beta - (i + di)$ und zugleich weil Winkel $QT'S = \frac{1}{2}\pi$ ist, $\alpha + \beta = \frac{1}{2}\pi$. Daher ist $\beta - i = 0$ und $d\sigma_1 = - di$ und also wegen $i + H = \frac{1}{2}\pi$ endlich $d\sigma_1 = dH$.

§ 6. **Krümmungshalbmesser der Evolvente.** Bezeichnet man die Länge MP mit p, so ist das Bogenelement $PP' = ds_1$ gegeben durch die Gleichung:

$$ds_1 = p . d\tau$$

und der Krümmungshalbmesser der Evolvente:

$$\varrho_1 = \frac{ds_1}{d\tau_1} = p . \frac{d\tau}{dk} = p . \cos i = p . \frac{R}{\varrho}.$$

Hieraus folgt, dass die Krümmungshalbmesser der Filarevolventen in den Punkten, in welchen sie dieselbe Tangente der primitiven Curve schneiden, um so grösser sind, je weiter diese Punkte von der Curve M abstehen. Die Evolventen werden mithin um so flacher, je weiter sie sich auf der Tangentenfläche von der Curve entfernen. Für $p = \varrho$ wird $\varrho_1 = R$, wie Cap. II, § 13, bereits gefunden wurde.

Aus der Gleichung $\varrho_1 = p . \cos i$ folgt, dass ϱ_1 die Projection von p auf die Schmiegungsebene von P oder, was dasselbe ist, dass

der Punkt M' (oder in der Grenze M) in einem im Krümmungsmittelpunkte auf der Schmiegungsebene der Curve P errichteten Perpendikel liegt (§ 3).

§ 7. Krümmungslinien der Tangentenfläche. Die Filarevolventen bilden das eine System von Krümmungslinien auf der Fläche der Tangenten, nämlich das System der Linien stärkster Krümmung, da sie senkrecht sind zu dem System der geraden Erzeugungslinien der Fläche, welche das System der Linien schwächster Krümmung bilden. Daher schneiden sich die Normalen der Tangentenfläche längs einer Filarevolvente und bilden eine abwickelbare Fläche. Diese Normalen sind aber nicht die Hauptnormalen der Evolvente, weil deren Schmiegungsebene nicht senkrecht steht auf der Schmiegungsebene der primitiven Curve, sondern auf der rectificirenden Geraden derselben. Solcher abwickelbaren Normalflächen giebt es so viele, als es Evolventen giebt; ihre Gratlinien bilden eine Fläche, welche der Ort der Krümmungsmittelpunkte der ebenen Normalschnitte der Tangentenfläche ist. Alle diese Gratlinien haben zum Contingenzwinkel den Schmiegungswinkel der primitiven Curve, da ihre Tangenten senkrecht zu den Schmiegungsebenen dieser sind und zum Schmiegungswinkel deren Contingenzwinkel, da ihre Schmiegungsebenen senkrecht zu den Tangenten der primitiven Curve sind. Die Normalen der Tangentenfläche längs einer Filarevolvente schneiden sich auf der rectificirenden Fläche und ist diese der Ort der Krümmungsmittelpunkte aller Normalschnitte der Tangentenfläche, welche zu den Tangenten senkrecht sind. Die rectificirende Fläche enthält auch die Curven der Krümmungsmittelpunkte aller Filarevolventen.

§ 8. Planevolventen. Lässt man eine Ebene so an einer Curve hingleiten, dass sie immer Schmiegungsebene derselben bleibt, so beschreibt jeder ihrer Punkte P eine gewisse Curve, welche die Schmiegungsebenen sämmtlich unter rechten Winkeln schneidet. Denn wenn die bewegliche Ebene die Lage der Schmiegungsebene des Punktes M hat, so geht sie noch durch zwei folgende Punkte M', M''; soll sie nun in die Lage der Schmiegungsebene des folgenden Punktes M' gelangen, welche durch M', M'', M''' geht, so muss sie sich um die gemeinschaftliche Durchschnittslinie beider Ebenen, nämlich um die Tangente $M'M''$ des Punktes M' und zwar um den Schmiegungswinkel $d\sigma$ des Punktes M drehen. Bei

dieser Bewegung beschreibt der Punkt P den unendlich kleinen Kreisbogen PP' um einen gewissen Punkt C in dieser Tangente, den man erhält, wenn man von P oder P' auf die Tangente ein Perpendikel $PC = P'C$ fällt. Die Ebene PCP' dieses Kreisbogens steht senkrecht auf der Tangente $M'M''$ und mithin auch auf der Schmiegungsebene $MM'M''$ des Punktes M, welche durch diese Tangente hindurch geht und das Bogenelement PP' ist senkrecht zum Radius PC, mithin ebenfalls senkrecht zur Schmiegungsebene, d. h. die Schmiegungsebene ist die Normalebene im Punkte P. Soll die bewegliche Ebene in die Lage der Schmiegungsebene der Punkte M'', M''', N^{IV}, ... gelangen, so muss sie sich nach und nach um die Tangenten dieser Punkte drehen, der Punkt P beschreibt alsdann die Bogenelemente $P'P''$, $P''P'''$, $P'''P^{IV}$, ... um die Punkte C', $C''C'''$, ... in jenen Tangenten und die Schmiegungsebenen der Punkte M', M'', M''', ... sind die Normalebenen der Curve P in den Punkten P', P'', P''', ...

Hieraus erhellt, dass die Curve (P) die Schmiegungsebenen der Curve (M) rechtwinklig schneidet, dass die Punkte C, aus welchen ihre Bogenelemente als Kreisbogen beschrieben wurden, ihre Krümmungsmittelpunkte und die Radien dieser Kreisbogen, nämlich die Perpendikel PC ihre Hauptnormalen und Krümmungshalbmesser sind; ferner dass die Winkel PCP', welche auch von den Tangenten in P und P' gebildet werden, d. h. die Contingenzwinkel der Curve (P) gleich den Schmiegungswinkeln $d\sigma$ der Curve (M) sind, dass die Schmiegungswinkel der Curve P gleich den Contingenzwinkeln $d\tau$ der Curve M sind, weil die Schmiegungsebenen, wie PCP' senkrecht auf den Tangenten dieser Curve stehen, sowie endlich, dass die Krümmungsaxen der Curve (P) identisch mit den Tangenten von (M) sind.

Die Curven (P) heissen Planevolventen der Curve M,* da die Curve M bei ihrer Erzeugung gewissermassen durch die bewegliche Schmiegungsebene abgewickelt wird. Eine Curve hat so viele Planevolventen, als Punkte in einer ihrer Schmiegungsebenen sind; alle zusammen bilden das System der orthogonalen Trajectorien der Schmiegungsebenen. Eine Planevolvente kann

---

* Lancret a. a. O. S. 417.

aber niemals zugleich Filarevolvente und eine Filarevolvente niemals zugleich Planevolvente derselben Curve sein. Denn die Punkte einer Filarevolvente liegen in den Tangenten. Nimmt man nun auch einen Punkt in einer Tangente an, so gelangt diese Tangente durch Drehung der Schmiegungsebene um die folgende Tangente nicht in die Lage dieser, also jener Punkt auch nicht auf die zweite Tangente, was für die Erzeugung einer Filarevolvente erforderlich ist. Ebenso gelangt der Punkt einer Filarevolvente, während er deren Bogenelement beschreibt, nicht in die folgende Schmiegungsebene, sondern bleibt in der ersten Schmiegungsebene, kann also diese erste Schmiegungsebene nicht rechtwinklig schneiden, was zur Erzeugung einer Planevolvente nothwendig ist.

Dagegen sind die Filarevolventen (P) einer Curve (M) Planevolventen der Gratlinie der rectificirenden Fläche dieser Curve. Denn die Schmiegungsebenen dieser Gratlinie sind die rectificirenden Ebenen von (M) und Normalebenen von (P). Wir werden bei der Behandlung der Fläche der Krümmungsaxen und der rectificirenden Fläche einer Curve hierauf zurückkommen.

IV. Capitel.

Die Fläche der Normalebenen oder der Krümmungsaxen und die Evoluten.

§ 1. **Die Fläche der Normalebenen oder der Krümmungsaxen.** Die Normalebenen einer Reihe aufeinanderfolgender Punkte $M, M', M'', \ldots$ einer Curve schneiden sich nach Cap. I, § 7 und Cap. II, § 5 in einer Folge Gerader $k, k', k'', \ldots$, welche auf den Schmiegungsebenen dieser Punkte in den Krümmungsmittelpunkten $C, C', C'' \ldots$ derselben senkrecht stehen und die Krümmungsaxen heissen. Diese schneiden sich selbst aufeinanderfolgend in den Punkten $K, K', K'', \ldots$ der Gratlinie der Fläche der Krümmungsaxen, deren Erzeugungslinien sie sind, und berühren in ihnen diese Curve K. Die Normalebenen der Punkte M sind Tangentenebenen dieser Fläche längs den Krümmungsaxen k und Schmiegungsebenen in den Punkten K der Gratlinie, in denen diese von den Krümmungsaxen berührt wird.

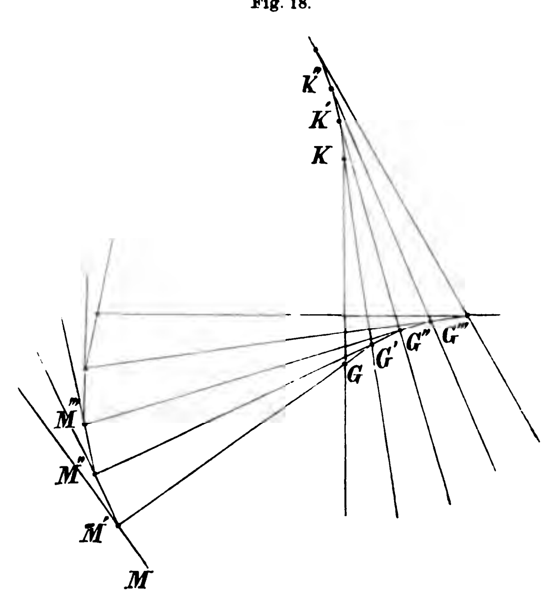
Der Krümmungsmittelpunkt C steht von drei aufeinanderfolgenden Punkten M, M', M'' gleichweit ab. Aus ihm können daher die beiden Bogenelemente MM', $M'M''$ beschrieben werden, sobald die Schmiegungsebene von M gegeben ist. Da die Krümmungsaxe im Mittelpunkt des Krümmungskreises auf dessen Ebene senkrecht steht, so ist jeder ihrer Punkte G Mittelpunkt eines geraden Kegels, dessen Fläche durch den Krümmungskreis geht, und daher steht dieser Punkt von allen Punkten des Krümmungskreises, insbesondere also auch von den drei Punkten M, M', M'' gleichweit ab, welche dieser mit der Curve gemein hat. Daher können auch aus G mit GM als Radius die beiden Elemente MM', $M'M''$ beschrieben werden. Bei dieser Beschreibung dreht sich die Ebene des rechtwinkligen Dreiecks GCM um die Krümmungsaxe um, seine Hypotenuse GM beschreibt zwei Elemente jener Kegelfläche, seine Kathete ein unendlich kleines Stück der Schmiegungsebene. Ist die Schmiegungsebene nicht gegeben, so kann der beschreibende Punkt M dadurch genöthigt werden, sich in ihr zu bewegen, dass man auf der Krümmungsaxe ausser G noch einen zweiten Punkt G' annimmt und das Dreieck GMG' sich um die Krümmungsaxe umdrehen lässt, während seine Seiten unveränderlich bleiben.

§ 2. Die Evoluten. Die Krümmungsaxe k ist der Durchschnitt der Normalebenen der Punkte M und M', die folgende Krümmungsaxe k' ebenso der Durchschnitt der Normalebenen von M' und M''; beide Krümmungsaxen liegen in der Normalebene des Punktes M'. Zieht man daher in dieser Normalebene von M' nach irgend einem Punkt G der Krümmungsaxe k die Gerade $M'G$, so trifft sie die folgende Krümmungsaxe k' in einem Punkte G'; zieht man hierauf in der Normalebene des folgenden Punktes M'' die Gerade $M''G'$, so trifft sie ebenso die Krümmungsaxe k'' in einem Punkte G''. Ebenso schneidet $M'''G''$ die Krümmungsaxe k''' in G''' u.s.f. Hierdurch erhält man auf der Fläche der Krümmungsaxe eine Curve $GG'G''\ldots$, deren Tangenten $M'G$, $M''G'$, $M'''G''$ durch die Punkte der Curve (M) hindurch gehen und die Tangenten dieser, da sie in deren Normalebenen liegen, rechtwinklig schneiden. Daher ist die Curve (M) nach Cap. III, § 3 eine Filarevolvente der Curve (G) und wird also von dem Punkte M einer beweglichen Geraden beschrieben, welche über die Curve (G) hingleitet und sie fortwährend berührt. Die Curve (G) heisst, weil sie durch die

Curve (M) gewissermassen abgewickelt wird, eine Evolute (Filarevolute) der Curve (M).

§ 3. Die Evolute als kürzeste Linie der Fläche der Krümmungsaxen. Die Ebene $M' G' M''$ (Fig. 18) ist die Schmiegungsebene der Evolute im Punkte G; da sie durch die Tangente der Curve (M) geht, so steht sie senkrecht auf deren Normalebene oder was dasselbe ist, auf der Tangentenebene der Fläche der Krümmungsaxen oder der Schmiegungsebene von deren Gratlinie (K). Daher ist die

Fig. 18.



Normalebene von M die rectificirende Ebene der Evolute und folglich die Fläche der Krümmungsaxen ihre rectificirende Fläche. Die Krümmungsaxen sind mithin die rectificirenden Geraden der Evolute. Wickelt man die Fläche der Krümmungsaxen und damit zugleich die Evolute ab, indem man jede Normalebene der Curve (M) um die Krümmungsaxe dreht, bis sie mit der folgenden Normalebene zusammenfällt, so fällt bei diesem Vorgange jede Tangente der Evolute mit der folgenden Tangente zusammen, weil der beschreibende Punkt M nach und nach mit allen Punkten der Curve (M) coincidirt, daher fallen schliesslich alle Tangenten der Evolute in eine Gerade zusammen, in welche die Evolute selbst übergeht und welche auf der abgewickelten Fläche

der Krümmungsaxen liegt. Hieraus folgt, dass die Evolute eine kürzeste Linie auf der Fläche der Krümmungsaxen ist.* (S. Cap. II, § 2.)

§ 4. Die Evolutenfläche. Die Gerade $M'G$, welche wir zuerst zogen und welche die Anfangstangente der Evolute bildete, war nach einem beliebigen Punkte G der Krümmungsaxe gerichtet; sobald sie aber construirt war, war damit auch der weitere Verlauf der Evolute vollständig bestimmt. Hieraus folgt, dass jede Curve unendlich viele Evoluten hat, welche auf der Fläche der Krümmungsaxen liegen. Daher also der Satz:

Die Fläche der Krümmungsaxen der Curve (M) ist der Ort aller Evoluten dieser Curve, sowie die Tangentenfläche der Ort aller ihrer Evolventen ist. Daher heisst sie auch die Evolutenfläche der Curve. Diese Fläche ist gemeinschaftliche rectificirende Fläche aller Evoluten.

Durch jeden Punkt der Evolutenfläche giebt es eine aber nur eine einzige Evolute. Denn legt man durch diesen Punkt die Tangentenebene an die Evolutenfläche, so schneidet sie die Curve (M) in einem Punkte, in welchem sie Normalebene dieser

---

* Die kürzesten Linien oder geodätischen Linien auf krummen Flächen besitzen allgemein die Eigenschaft, dass ihre Schmiegungsebenen durch die Normalen der Fläche gehen, also Normalebenen der Fläche und folglich die Normalen der Fläche in den Punkten dieser Curven deren Hauptnormalen sind. Um diese Eigenschaft elementar zu beweisen, betrachte man zunächst irgend zwei Ebenen, E, E', welche sich in einer Geraden d schneiden, und nehme in ihnen zwei Punkte A, A' an. Zieht man von A nach einem Punkt C der Durchschnittslinie d und von da nach A' gerade Linien, so sieht man leicht, dass die Summe $AC + CA'$ am kleinsten wird, wenn man den Punkt C so wählt, dass die Winkel, welche AC und CA' mit den entgegengesetzten Richtungen von d bilden, gleich werden oder was dasselbe ist, die Winkel, welche sie mit derselben Richtung von d bilden, sich zu 180^0 ergänzen. Denn dreht man die eine von beiden Ebenen (E') um ihre Durchschnittslinie d so lange um, bis ihr Winkel verschwindet und zwar nach der Richtung, dass alsdann A und A' auf entgegengesetzten Seiten der Durchschnittslinie in der festen Ebene liegen, so bleiben dabei die Strecken AC und CA' unverändert, also auch ihre Summe; diese aber ist am kleinsten, wenn AC und CA' in eine gerade Linie fallen. Gesetzt nun, es war der Winkel beider Ebenen unendlich klein, so beschreibt der Punkt A', wenn man die Ebene E' durch Drehung um diesen unendlich kleinen Winkel in ihre ursprüngliche Lage zurückbringt, einen unendlich kleinen Kreisbogen

Curve ist Verbindet man diesen Punkt mit jenem, so ist die Verbindungslinie die Tangente der Evolute, welche durch jenen Punkt hindurchgeht. Diese Evolute ist aber durch ihre Tangente vollständig und unzweideutig bestimmt.

Auf der Fläche der Krümmungsaxen liegen auch die Curven (K) und (C), die Gratlinie der Fläche und die Curve der Krümmungsmittelpunkte. Keine von beiden ist eine Evolute. Damit nämlich eine Curve dieser Fläche Evolute einer andern Curve (M) sei, müssen ihre Tangenten in den Normalebenen dieser liegen und die Curve (M) schneiden. Die erste dieser Bedingungen ist zwar für jede der beiden Curven erfüllt, nicht aber die zweite. Denn die Tangenten der Curve (K) sind die Krümmungsaxen und diese liegen in den Normalebenen der Curve (M), gehen aber durch die Krümmungsmittelpunkte und nicht durch die Punkte der Curve selbst. Die Tangenten der Curve (C) sind die Verbindungslinien der aufeinanderfolgenden Krümmungsmittelpunkte C, C', C'', ... und da diese Punkte in den Krümmungsaxen liegen und je zwei aufeinanderfolgende Krümmungsaxen in je eine Normalebene der Curve M fallen, so liegen auch die Tangenten dieser Curve in den Normalebenen von (M). Allein sie gehen nicht durch die Punkte dieser Curve selbst, weil sie sonst mit den Hauptnormalen zusammenfallen müssten, die sich nicht schneiden und also auch nicht Tangenten an eine Curve sein

$A'A''$, um einen Punkt in der Geraden d, den man findet, indem man von A' ein Perpendikel auf d fällt. Die Ebene dieses Kreisbogens steht senkrecht auf der Rotationsaxe d und da die Tangente desselben auf dem Radius senkrecht steht, so steht diese Linie senkrecht auf der Ebene E und ist also parallel der Normalen, die man in A auf der Ebene E errichten kann. Da die Tangente aber die Richtung des unendlich kleinen Kreisbogens hat, so fällt sie in die Ebene $A'CA''$ oder also in die Ebene der Geraden AC, CA''. In diese Ebene fällt also auch die in A errichtete Normale der Fläche E. Sind nun die Ebenen E, E' zwei Tangentenebenen einer krummen Fläche in zwei unendlich nahen Punkten, so geht die Normale von E in A in die Normale der Fläche und die Ebene ACA'' in die Schmiegungsebene einer kürzesten Linie zwischen zwei unendlich nahen Punkten über. Die kürzeste Linie zwischen zwei endlich entfernten Punkten muss aber ihren Charakter auch zwischen zwei unendlich nahen Punkten bewahren und daher folgt der obige Satz. Es ergiebt sich noch weiter: Ist eine Curve geodätische Linie auf einer Fläche, so ist sie auch geodätische Linie auf allen Flächen, welche diese Fläche längs der Curve berühren; denn die Hauptnormalen der Curven sind Normalen aller dieser Flächen.

können. Nur dann, wenn die Curve (M) eben ist, schneiden sich die Hauptnormalen und berühren die Curve (C). Nur dann also ist diese Curve eine Evolute, und zwar diejenige, welche in der Ebene der Curve selbst liegt.

§ 5. Planevolute. In Bezug auf die Curve (K) ist die Curve (M) eine Planevolvente (Cap. III, § 8). Wenn nämlich ihre Schmiegungsebene an ihr hingleitet, so beschreibt einer ihrer Punkte die Curve (M), weil diese Curve die sämmtlichen Schmiegungsebenen rechtwinklig schneidet. Daher kann die Curve (K) in diesem Sinne eine Planevolute der Curve (M) genannt werden, zum Unterschiede von allen andern Evoluten derselben, welche Filarevoluten sind.

Jede Curve (M) hat unendlich viele Filarevolventen und unendlich viele Filarevoluten. Erstere erfüllen die Fläche der Tangenten, letztere die Fläche der Krümmungsaxen; jene sind orthogonale Trajectorien der Tangenten, diese kürzeste Linien der Fläche der Krümmungsaxen. Jede Evolvente von (M) hat unendlich viele Evoluten und diese erfüllen die rectificirende Fläche von (M) und diese rectificirende Fläche ist gemeinsame Evolutenfläche für alle Evolventen. Jede Evolute von (M) hat unzählige Evolventen, von denen (M) eine einzelne ist; alle bilden zusammen ein System von Parallelcurven zu (M).

Jede Curve (M) ist eine Planevolvente der Gratlinie ihrer Fläche der Krümmungsaxen. Diese Gratlinie hat unendlich viele Planevolventen, welche das ebengenannte System der Parallelcurven zu (M) bilden. Jede Evolvente von (M) ist eine Planevolvente der Gratlinie der rectificirenden Fläche von (M).

Dieselbe Abhängigkeit, welche zwischen einer Curve und ihrer Fläche der Krümmungsaxen besteht, besteht zwischen jeder ihrer Evolventen und der rectificirenden Fläche, denn diese ist die Fläche der Krümmungsaxen oder die Evolutenfläche für sie.

§ 6. Specielle Fälle der Evolutenfläche. Ist die Curve (M) eben, so ist ihre Evolutenfläche nach Cap. I, § 11 ein Cylinder, dessen Erzeugungslinien senkrecht zur Ebene der Curve sind. Sie hat dann eine ebene Evolute, nämlich die Curve der Krümmungsmittelpunkte, welche der Durchschnitt des Cylinders mit ihrer Ebene ist. Alle andern Evoluten sind Curven doppelter Krümmung.

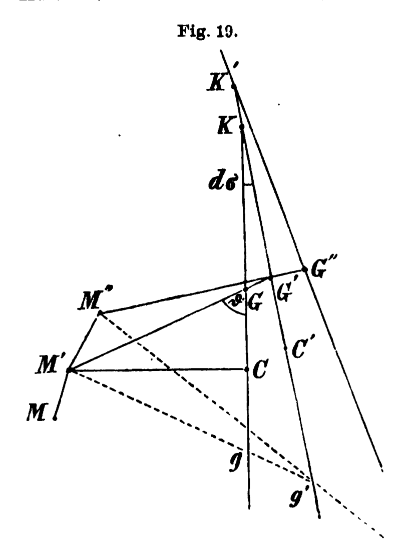
Ist die Curve sphärisch, so ist ihre Evolutenfläche ein Kegel, dessen Mittelpunkt in den Kugelmittelpunkt fällt. Keine ihrer

Evoluten ist eben. Ist die Curve weder eben noch sphärisch, so ist die Evolutenfläche eine allgemeine abwickelbare Fläche. Eine Cylinderfläche kann nur für ebene, eine Kegelfläche nur für sphärische Curven Evolutenfläche sein. In besonders ausgezeichneten Punkten kann aber eine Curve ebene oder sphärische Beschaffenheit haben; ist dies der Fall, so spricht sich diese Eigenschaft in der Natur ihrer Evolutenfläche aus.

§ 7. Monge's Fadenconstruction. Bei der Abwickelung der Evolute beschreibt ein gewisser Punkt ihrer Tangente (des Fadens) die Curve (M). Um die Bewegung des Fadens zu reguliren, wickelt Monge gleichzeitig zwei Evoluten ab,* der Durchschnitt ihrer Tangenten (der Knoten, in welchem die Fäden verknüpft sind) beschreibt die Curve. Ist also die Evolutenfläche gegeben, so kann man einen Punkt mechanisch nöthigen, die Curve (M) zu beschreiben, indem man zwei Fäden frei über die Fläche hinspannt und sie in einen Knoten zusammenbindet.

§ 8. Gruppirung der Evoluten auf der Evolutenfläche. Alle Evoluten ein und derselben Curve (M) unterscheiden sich durch

Fig. 19.



die Lage der Tangente $M'G$ von einander. Die Lage dieser Geraden ist durch den Winkel $GM'C$ (Fig. 19), den sie mit der Schmiegungsebene des Punktes M oder, was dasselbe ist, mit dem Krümmungshalbmesser MC (oder $M'C$) bildet, oder auch durch dessen Complement, nämlich den Winkel

$$M'GC = \vartheta,$$

den sie mit der Krümmungsaxe des Punktes M bildet, bestimmt, wenn noch die Seite der Schmiegungsebene von M bekannt ist, auf welcher G liegt. Ist letztere nicht bestimmt, so giebt es zwei Evoluten, deren Tangenten $M'G$, $M'g$, die Krümmungsaxe auf entgegengesetzten Seiten der Schmiegungsebene in gleichem Abstand

* Monge, Application etc. S. 415.

vom Krümmungsmittelpunkte unter demselben Winkel ϑ schneiden. Die Evoluten sind daher um die Curve der Krümmungsmittelpunkte symmetrisch gruppirt, sodass sie paarweise rechts und links von dieser mit derselben Krümmungsaxe gleiche Winkel bilden.

§ 9. Neigung der Evolute gegen die Krümmungsaxe. Um zu sehen, wie der Winkel $\vartheta = M'GC$ sich ändert, welchen die Evolute mit der Krümmungsaxe bildet, hat man Winkel $M''G'C' = \vartheta + d\vartheta$. Da aber die Krümmungsaxe $C'K'$ Axe eines geraden Kegels ist (§ 1), dessen Mittelpunkt G' ist und welcher durch die drei Punkte M', M'', M''' geht, so ist $M'G'C' = M''G'C' = \vartheta + d\vartheta$, mithin die gesuchte Aenderung

$$d\vartheta = M'G'C' - M'GC.$$

Aus dem Dreieck GKG' folgt aber, dass diese Differenz gleich dem Winkel GKG' ist, den die beiden Krümmungsaxen CK und $C'K'$ mit einander bilden. Dieser ist aber der Schmiegungswinkel $d\sigma$ der Curve (M), daher ist also

$$d\vartheta = d\sigma,$$

das heisst:

Die Aenderung des Winkels ϑ, welchen eine Evolute mit der Krümmungsaxe bildet, ist gleich dem Schmiegungswinkel $d\sigma$ der primitiven Curve.

Ist die Curve eben, so ist $d\sigma = d\vartheta = 0$; in diesem Falle ist die Evolutenfläche ein Cylinder und es bildet die Evolute mit dessen Erzeugungslinien einen constanten Winkel. Eine Curve, welche auf einem Cylinder liegt und dessen Erzeugungslinien unter constantem Winkel schneidet, heisst eine Helix oder Schneckenlinie oder auch Schraubenlinie des Cylinders. Die Evoluten ebener Curven sind also sämmtlich Helixe.

Da der Winkel ϑ immer um den Schmiegungswinkel $d\sigma$ zu- oder abnimmt, so folgt, dass er einmal den Werth $\frac{\pi}{2}$ erreicht. Tritt dies ein, so steht die Tangente der Evolute senkrecht auf der Krümmungsaxe und fällt mit dem Krümmungshalbmesser zusammen. Hieraus erkennt man, dass jede Evolute während ihres Verlaufes mit der Curve der Krümmungsmittelpunkte wenigstens einmal einen Punkt gemein hat und dass sie von dem betreffenden Krümmungshalbmesser in diesem Punkte berührt wird. Da aber der Krümmungshalbmesser die Curve der Krümmungsmittelpunkte nicht berührt, sondern schneidet, so folgt, dass die Evolute in diesem Punkte die Curve der Krümmungsmittelpunkte schneidet.

In ähnlicher Weise zeigt man, dass jede Evolute die Curve (K) wenigstens einmal schneiden muss.

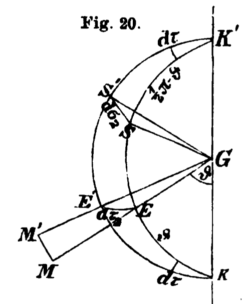
§ 10. Abwickelung der Evolutenfläche. Lässt man eine Ebene ε über die Evolutenfläche rollen, ohne dass sie gleitet, so rotirt sie nach und nach um die verschiedenen Krümmungsaxen k und bleibt in allen Lagen normal zur Curve (M), welcher die Evolutenfläche angehört. Ein bestimmter Punkt von ε beschreibt die Curve (M). Dabei bilden sich die Krümmungsaxen, die Gratlinie (K) der Fläche und die Curve (C) der Krümmungsmittelpunkte auf der Ebene ε ab, nebst allem übrigen, was auf der Evolutenfläche liegt. Die Gratlinie (K) und die Curve (C) gehen in zwei ebene Curven (k) und (γ) über, von denen die erste mit (K) gleiche Bogenelemente und Contingenzwinkel, die letztere mit (C) gleiche Bogenelemente, aber verschiedene Contingenzwinkel hat. Die Curve (M) reducirt sich auf einen Punkt μ und ist (γ) die Fusspunktcurve von (k) in Bezug auf den Punkt μ als Pol. Die Evoluten von (M) gehen in die Geraden des Punktes μ über. Derselbe Process vollzieht sich, wenn man umgekehrt die Evolutenfläche auf der Ebene ε abrollt, sowie auch, wenn man die Evolutenfläche so verbiegt, dass ihre ebenen Flächenelemente um die Erzeugungslinien (Krümmungsaxen) gedreht werden, sodass sie alle in eine Ebene ε fallen. Dieser Process, mag er nun in der einen oder der anderen oder auch der dritten Auffassungsweise gedacht werden, heisst die Abwickelung der Evolutenfläche mit der Ebene ε, oder auf der Ebene ε. Umgekehrt kann das auf diese Weise in ε gebildete ebene System zur Evolutenfläche aufgerollt werden, wobei der Punkt μ die Curve (M) beschreibt, die ebene Curve (k) in die Gratlinie (K) gebogen wird und die Ebene sich gewissermassen zu den Schmiegungsebenen von (K) entblättert, welche aufeinanderfolgend mit einander die Schmiegungswinkel $d\tau$ von (K) bilden.

Während der Punkt μ das Bogenelement MM' der Curve (M) beschreibt, durchstreicht jeder seiner Strahlen ein Element der Schmiegungsebene einer Evolute, welche durch MM' hindurchgeht und senkrecht zur Ebene ε ist. Der Strahl berührt die Evolute. Die Tangenten zweier Evoluten schneiden sich daher im Curvenpunkte M überall unter demselben Winkel, wo auch immer μ auf der Curve (M) liegen mag. Ebenso bilden die Schmiegungsebenen zweier Evoluten, indem sie sich in MM' schneiden, überall mit einander denselben

Winkel, nämlich den Winkel, welchen die beiden geraden Strahlen des Punktes μ bilden, in welche die beiden Evoluten durch die Abwickelung übergehen.

Bei der Abwickelung der Evolutenfläche mit der Ebene ε beschreibt jeder Punkt dieser Ebene eine Planevolvente der Gratlinie (K) und alle diese Planevolventen sind Parallelcurven zu (M) und haben die Evolutenfläche gemeinschaftlich mit (M).*

§ 11. Der Contingenzwinkel $d\tau_2$ der Evoluten. Es sei G (Fig. 20) der Punkt einer Evolute der Curve (M), entsprechend dem Punkte M. Er liegt auf der Krümmungsaxe GK und die Tangenten GM, $G'M'$ bilden mit der Krümmungsaxe gleiche Winkel ϑ und unter sich den Contingenzwinkel $d\tau_2$; sie liegen in den Normalebenen der Punkte M, M', welche den Contingenzwinkel $d\tau$ der Curve (M) einschliessen. Diese Tangenten und die Krümmungsaxe bestimmen daher auf einer um G mit der Einheit als Radius beschriebenen Kugelfläche ein unendlich schmales sphärisches Dreieck KEE', dessen Seiten $KE = KE' = \vartheta$, $EE' = d\tau_2$ und dessen Winkel $K = d\tau$ ist. Aus demselben folgt $d\tau_2 = d\tau \cdot \sin\vartheta$, d. h.:



Der Contingenzwinkel einer Evolute ist gleich dem Producte des Contingenzwinkels der ursprünglichen Curve und dem Sinus des Winkels, welchen die Tangente der Evolute mit der Krümmungsaxe bildet. Der Contingenzwinkel der Evolute ist daher nie grösser als der Contingenzwinkel der ursprünglichen Curve.

Auch kann man so schliessen: Es ist (Fig. 19):

$$MM' = ds = MG \cdot d\tau_2 \quad \text{und} \quad MG \cdot \sin\vartheta = MC = \varrho = ds : d\tau,$$

mithin indem man MG eliminirt, $d\tau_2 = d\tau \cdot \sin\vartheta$, wie vorher.

§ 12. Der Schmiegungswinkel der Evoluten. Errichtet man (Fig. 20) auf die Schmiegungsebenen MGM' und $M'G'M''$ der

---

* Ueber die Abwickelung der Evolutenfläche vgl. Steiner, Ueber einige allgemeine Eigenschaften der Curven doppelter Krümmung. Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1839, S. 76—80, oder: Gesammelte Werke, hsgeg. v. Weierstrass, Bd. II, S. 163—165. Ein kleiner Irrthum muss dortselbst berichtigt werden. Die Curve der Krümmungsmittelpunkte ist nämlich im Allgemeinen keine kürzeste Linie der Evolutenfläche.

Evolute (G) Normalen GS, GS', so bilden sie mit einander den Schmiegungswinkel $d\sigma_2$ der Evolute. Diese Normalen fallen aber in die Normalebenen M und M' und bestimmen auf der Kugelfläche der Figur das unendlich schmale Dreieck KSS' mit dem Winkel $d\tau$ an der Ecke K', den Seiten $K'S = K'S' = \frac{1}{2}\pi - \vartheta$ und $SS' = d\sigma_2$, woraus folgt: $d\sigma_2 = d\tau \cdot \cos\vartheta$, d. h:

Der Schmiegungswinkel $d\sigma_2$ einer Evolute ist das Product des Contingenzwinkels der ursprünglichen Curve und des Cosinus der Neigung der Tangente der Evolute gegen die Krümmungsaxe.

§ 13. Der Winkel der ganzen Krümmung der Evoluten. Die Hauptnormalen der Evolute stehen senkrecht auf den Normalebenen der ursprünglichen Curve. Sie sind daher den Tangenten dieser parallel und ist ihr Winkel, der Winkel der ganzen Krümmung daher $dk_2 = d\tau$.

Der Winkel der ganzen Krümmung der Evoluten ist unabhängig von der Neigung der Evolute gegen die Krümmungsaxe und gleich dem Contingenzwinkel der ursprünglichen Curve.

Dies Resultat folgt auch mit Hülfe des Lancret'schen Satzes. Denn nach diesem ist $dk_2^2 = d\tau_2^2 + d\sigma_2^2$ und es ist $d\tau_2 = d\tau \sin\vartheta$, $d\sigma_2 = d\tau \cos\vartheta$, mithin $dk_2 = d\tau$.

Man kann die Sätze §§ 11—13 auch aus den Sätzen Cap. III, § 5 ableiten. Betrachtet man dort die Curve P als primitiv, so ist die Curve (M) eine ihrer Evoluten und da der Winkel i der Neigungswinkel der Schmiegungsebene der Curve (M) gegen die Schmiegungsebene von P ist, so ist i auch der Winkel, welchen die Tangente von (M) mit dem Krümmungshalbmesser von P bildet, weil die Ebene dieser beiden Linien als Normalebene von P auf der Tangente von P, in welcher sich die beiden Schmiegungsebenen schneiden, senkrecht steht. Daher ist i das Complement des Winkels H, welchen die Evolute (M) mit der Krümmungsaxe des Punktes P bildet. In dem unendlich kleinen Dreieck $T'TQ$ sind nun: TT' der Contingenzwinkel $d\tau_1$, der Curve P, den wir hier mit $d\tau$ bezeichnen, $T'Q = d\sigma$, der Schmiegungswinkel von (M), den wir hier als Schmiegungswinkel der Evolute $d\sigma_2$ nennen und $TQ = d\tau$, wofür wir jetzt $d\tau_2$ schreiben müssen, der Contingenz-

winkel von (M). Aus den dortigen Relationen findet man daher, indem man das dortige H hier durch das analoge ϑ ersetzt:

$$d\tau_2 : d\sigma_2 : dk_2 = \sin\vartheta : \cos\vartheta : 1$$

mithin auch

$$dk_2 = d\tau,$$

$$d\tau_2 = d\tau \cdot \sin\vartheta$$

$$d\sigma_2 = d\tau \cdot \cos\vartheta.$$

§ 14. **Bogenelement und Krümmungsverhältnisse der Evolute.** Das Bogenelement $GG' = ds_2$ der Evolute folgt aus dem Dreieck KGG' (Fig. 19). Man hat nämlich:

$$GG' : KG = \sin d\sigma : \sin(\vartheta + d\sigma),$$

mithin, wenn man den Abstand des Punktes G der Evolute vom Punkte der Curve K mit ε bezeichnet und abkürzt:

$$ds_2 = \varepsilon \cdot \frac{d\sigma}{\sin\vartheta}.$$

Mit Hülfe desselben und der im vorigen Paragraphen gefundenen drei Krümmungswinkel $d\tau_2$, $d\sigma_2$, dk_2 findet man die Radien der drei Krümmungen:

$$\varrho_2 = \frac{\varepsilon}{\sin^2\vartheta} \cdot \frac{d\sigma}{d\tau} = \varepsilon \cdot \frac{r\sin^2\vartheta}{\varrho}$$

$$r_2 = \frac{\varepsilon}{\sin\vartheta\cos\vartheta} \cdot \frac{d\sigma}{d\tau} = \varepsilon \cdot \frac{r\sin\vartheta\cos\vartheta}{\varrho}$$

$$R_2 = \frac{\varepsilon}{\sin\vartheta} \cdot \frac{d\sigma}{d\tau} = \varepsilon \cdot \frac{\varrho}{r\sin\vartheta}.$$

Man sieht hieraus, dass diese drei Radien mit ε gleichzeitig wachsen. Eliminirt man ϑ, so ergiebt sich noch:

$$\varepsilon = \frac{r}{\varrho} \cdot \frac{R_2^2}{\varrho_2}$$

und durch Elimination von ε:

$$\varrho_2 \sin\vartheta + r_2 \cos\vartheta = 2R_2,$$

welche Relation mit Hülfe von Fig. 6 sich erläutert, wenn man bedenkt, dass die Krümmungsaxe die rectificirende Gerade der Evolute (G) ist und ϱ_2, r_2, R_2 Katheten und Hypotenusenhöhe eines rechtwinkligen Dreiecks sind, welches den Winkel der Tangente mit der rectificirenden Geraden (hier ϑ) enthält.

V. Capitel.

Die Schmiegungskugel und der gerade Schmiegungskegel.

§ 1. Die Schmiegungskugel und der Ort ihrer Mittelpunkte. Jeder Punkt der Krümmungsaxe k steht von drei aufeinanderfolgenden Punkten M, M', M'' der Curve gleichweit ab, und ist daher Mittelpunkt einer Kugel, welche durch diese drei Punkte geht und folglich die Curve in der zweiten Ordnung berührt. Die Krümmungsaxe ist daher der Ort für die Mittelpunkte der Schaar Kugeln, welche die Curve dreipunktig oder in der zweiten Ordnung berühren. Auf jeder von diesen liegt der Krümmungskreis, er ist der gemeinsame Durchschnitt aller dieser Kugeln. Unter ihnen giebt es drei ausgezeichnete, nämlich 1. die kleinste von ihnen; ihr Mittelpunkt und Radius sind der Krümmungsmittelpunkt und Krümmungshalbmesser, denn von allen Punkten der Krümmungsaxe hat der Krümmungsmittelpunkt den kürzesten Abstand von der Curve; 2. die grösste, nämlich die Schmiegungsebene, welche einem unendlich grossen Radius entspricht und den unendlich fernen Punkt der Krümmungsaxe zum Mittelpunkte hat und 3. eine Kugel, deren Mittelpunkt im Durchschnitt K der Krümmungsaxe k mit der folgenden Krümmungsaxe k' liegt. Weil dieser Punkt in der Krümmungsaxe k liegt, so geht die Kugel durch die Punkte M, M', M'' und weil er der Krümmungsaxe k' angehört, durch die Punkte M', M'', M'''. Diese Kugel hat daher vier aufeinanderfolgende Punkte M, M', M'', M''' mit der Curve gemein und berührt sie inniger als alle anderen, überhaupt so innig als eine Kugel berühren kann, da dieselbe durch vier Punkte bestimmt ist, nämlich vierpunktig oder in der dritten Ordnung. Wir nennen sie die Schmiegungskugel der Curve im Punkte M. Auf ihr liegen die Krümmungskreise zweier aufeinanderfolgender Punkte M, M' der Curve.

Der Ort der Mittelpunkte aller Schmiegungskugeln der Curve M ist die Gratlinie (K) der Fläche der Krümmungsaxen.

§ 2. **Radius der Schmiegungskugel und seine Neigung gegen die Schmiegungsebene.** Um den Radius $KM = KM' = \overset{*}{R}$ (Fig. 21) der Schmiegungskugel und seine Neigung:

$$KMC = KM'C = KM''C = \mu$$

gegen die Schmiegungsebene zu bestimmen, stelle die Ebene der Figur $M'CC'K$ die Normalebene des Punktes M' dar. In ihr liegen die beiden Krümmungsaxen CK, $C'K$, welche mit einander den Schmiegungswinkel $d\sigma$ bilden, die Hauptnormale $M'C'$ von M' und ihre Projection $M'C$ auf die Schmiegungsebene von M, welche beide Linien die Krümmungsaxen in den Krümmungsmittelpunkten C', C der Punkte M', M treffen und mit einander gleichfalls den Winkel $d\sigma$ bilden und der Winkel $KM'C = \mu$. Ist Q der Durchschnitt der Krümmungsaxe CK mit der Hauptnormalen $M'C'$, so folgt, weil das rechtwinklige Dreieck $M'CQ$ unendlich schmal ist, $M'Q = M'C = MC = \varrho$ und da $M'C' = \varrho + d\varrho$ ist, so wird $QC' = d\varrho$. In dem Dreieck KQC' ist

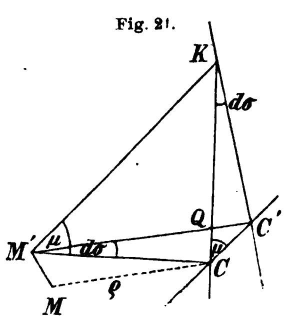


Fig. 21.

ferner $KQ \cdot d\sigma = QC'$ und folglich in der Grenze, wenn wir den Abstand KC des Mittelpunktes der Schmiegungskugel von der Schmiegungsebene (dem Krümmungsmittelpunkte) mit h bezeichnen: $h d\sigma = d\varrho$, mithin:

$$h = \frac{d\varrho}{d\sigma}$$

oder auch wegen

$$r = \frac{ds}{d\sigma}$$

$$h = r \cdot \frac{d\varrho}{ds}.$$

Mit Hülfe dieses Werthes folgt sofort aus dem rechtwinkligen Dreieck $KM'C$ für den Radius der Schmiegungskugel und seine Neigung gegen die Schmiegungsebene:

$$\overset{*}{R}{}^2 = \varrho^2 + h^2 = \varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\sigma}\right)^2 = \varrho^2 + r^2 \left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2$$

$$tg\,\mu = \frac{h}{\varrho} = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{d\varrho}{d\sigma} = \frac{r}{\varrho} \cdot \frac{d\varrho}{d\sigma} = \frac{r^2}{\varrho} \frac{d\varrho}{ds}.$$

§ 3. **Die Curve der Krümmungsmittelpunkte und die Neigung ihrer Tangente gegen die Krümmungsaxe.** Da sowohl der Winkel $M'CK$, als auch $M'C'K$ ein rechter ist, so liegen

die vier Punkte M', C, C', K in einem Kreise, welcher über dem Radius $M'K$ der Schmiegungskugel als Durchmesser beschrieben werden kann. Die Linie CC' oder das Element der Curve der Krümmungsmittelpunkte fällt mit einem Elemente dieses Kreises zusammen und die Tangente des Kreises in C ist folglich die Tangente an der Curve der Krümmungsmittelpunkte. Da diese Tangente aber mit der Sehne CK den Winkel μ bildet, welcher der Peripheriewinkel ist, der über der Sehne steht, so folgt:

Der Neigungswinkel des Radius der Schmiegungskugel gegen die Schmiegungsebene und der Winkel, welchen die Tangente an der Curve der Krümmungsmittelpunkte mit der Krümmungsaxe bildet, sind gleich.

§ 4. Beziehungen zwischen der Curve (K) der Schmiegungskugelmittelpunkte und der primitiven Curve (M). Man erkennt unmittelbar die folgenden Sätze:

Die Schmiegungsebene von (K) fällt zusammen mit der Normalebene von (M); die Normalebene von (K) ist parallel der Schmiegungsebene von (M); die rectificirenden Ebenen von (K) und (M) sind einander parallel.

Die Tangente, Hauptnormale und Binormale von (K) ist beziehungsweise parallel der Binormalen, Hauptnormalen und Tangente von (M).

Die rectificirenden Geraden, die rectificirenden Flächen und die Gratlinien derselben von den Curven (K) und (M) sind parallel.

Die Winkel, welche die rectificirenden Geraden von (K) und (M) mit den Tangenten dieser Curven bilden, ergänzen einander zu $\frac{1}{2}\pi$; wächst der eine, so nimmt der andere ab.

Ein Specialfall der Curve (K) tritt ein, wenn der Krümmungshalbmesser ϱ constant und die Curve nicht eben ist, d. h. $d\sigma$ nicht gleich Null ist. Es wird daher $h = o$ und $\overset{*}{R} = \varrho$, also ebenfalls constant, d. h.:

Bei allen Curven doppelter Krümmung von constantem Krümmungshalbmesser ist auch der Radius der Schmiegungskugel constant, nämlich gleich dem Krümmungshalbmesser und fällt die Curve der Mittelpunkte

der Schmiegungskugeln mit der Curve der Krümmungsmittelpunkte zusammen.

Ist ϱ constant und $d\sigma = o$ d h. die Curve eben und ein Kreis, so wird h und hiermit $\overset{*}{R}$ und die Schmiegungskugel selbst unbestimmt. Jede durch den Kreis gehende Kugel kann als Schmiegungskugel desselben angesehen werden.

Ist die Curve eben, also $d\sigma = o$ aber ϱ nicht constant, so wird $h = \infty$, $\overset{*}{R} = \infty$; die Schmiegungskugel geht in die Schmiegungsebene über. Für sphärische Curven wird $\overset{*}{R}$ constant und gleich dem Radius der Kugel, auf welcher die Curve liegt. Die sämmtlichen Schmiegungskugeln fallen mit dieser zusammen, da die Curve (K) sich auf den Mittelpunkt dieser zusammenzieht.

Die Betrachtung der Schmiegungskugel zeigt, dass jede Curve doppelter Krümmung in Bezug auf drei aufeinanderfolgende Elemente als sphärisch angesehen werden kann. Auch eine ebene Curve ist in gewissem Sinne als sphärisch zu betrachten, nämlich als auf einer unendlich grossen Kugel liegend. Begründet man ein räumliches Beziehungssystem der Art, dass einer Kugel wieder eine Kugel und allen Punkten auf jener Punkte auf dieser entsprechen, so entspricht der unendlich grossen Kugel des einen Systems eine bestimmte Kugel des andern, also einer ebenen Curve eine sphärische und es können Eigenschaften der sphärischen Curven aus denen der ebenen Curven abgeleitet werden. Ein solches Beziehungssystem hat Möbius aufgestellt.*

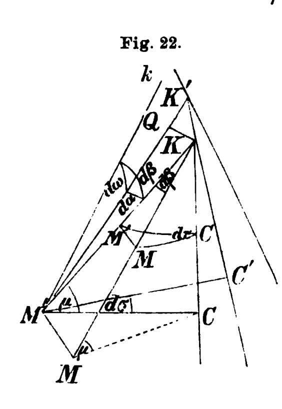
§ 5. Winkel zweier aufeinanderfolgender Schmiegungskugelradien. Die aufeinanderfolgenden Radien $MK, M'K', M''K'', \ldots$ der Schmiegungskugeln schneiden sich nicht, sondern erzeugen eine windschiefe Fläche, welche durch die entsprechenden Punkte der Curven (M) und (K) geht. Sie liegen nämlich in verschiedenen Ebenen, den Normalebenen der Curve (M) und treffen die Durchschnittslinien dieser, die Krümmungsaxen, in verschiedenen Punkten $K, K', \ldots$ Nur in einem Falle geht die Fläche dieser Radien in eine abwickelbare Fläche über, nämlich dann, wenn die Curve (K) sich auf einen Punkt reducirt, wie es bei den sphärischen und ebenen Curven der

* Möbius, die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung. (Abhdl. d. K. S. Gesellsch. d. Wissenschaften, B. IV, S. 572.)

Fall ist, bei welchen diese Fläche eine Kegelfläche, resp. Cylinderfläche ist.

Um den Winkel $d\omega$ zu bestimmen, den die Radien KM, $K'M'$ (Fig. 22) zweier aufeinanderfolgender Schmiegungskugeln mit einander bilden, betrachten wir das windschiefe Viereck $MM'K'K$, in welchem die beiden Seiten MM', KK' die Bogenelemente der Curven M und K sind, und ziehen in diesem die Diagonale $M'K$.

Fig. 22.



Die Ebenen der beiden Dreiecke MKM' und $KM'K'$, welche dies Viereck bilden, sind senkreckt zu einander, denn die erste von ihnen geht durch die Tangente MM', die zweite ist die Normalebene in M'. Zieht man daher durch M' eine Parallele $M'k$ zu dem Radius KM der ersten Schmiegungskugel, so bilden die drei Geraden $M'k$, $M'K'$, $M'K$ eine an der Kante $M'K$ rechtwinklige unendlich kleine Ecke, welche auf einer um M' mit der Einheit als Radius beschriebenen Kugel ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck bestimmt, in welchem die Hypotenuse den Winkel $d\omega$ der beiden Radien KM, $K'M'$ der Schmiegungskugeln misst. Bezeichnen wir die beiden anderen Seiten $KM'K'$ und $KM'k$ einstweilen mit $d\alpha$ und $d\beta$, so wird:

$$d\omega^2 = d\alpha^2 + d\beta^2.$$

Um den Winkel $d\alpha$ zu finden, berücksichtigen wir, dass in der Normalebene des Punktes M' die vier in M' sich schneidenden Linien:

$$M'C,\ M'C',\ M'K,\ M'K'$$

die Winkel bilden:

$$CM'C' = d\sigma,\quad CM'K = \mu,\quad C'M'K' = \mu + d\mu,$$

dass folglich der Winkel

$$KM'K' = d\alpha = CM'K' - CM'K = d\sigma + \mu + d\mu - \mu = d\sigma + d\mu$$

wird. Daher ist also

$$d\alpha = d\sigma + d\mu.$$

Um aber den Winkel $d\beta$ zu bestimmen, fassen wir die von den drei Linien KM, KM' und KC gebildete Ecke ins Auge, welche in dem ihr entsprechenden sphärischen Dreiecke CMM' zwei gleiche Seiten $CM = CM' = \frac{\pi}{2} - \mu$ hat, während die dritte Seite

$M'M = d\beta$ und der Winkel $C = d\tau$, nämlich gleich dem Winkel der Normalebenen MKC und $M'KC'$ ist. Daher hat man

$$d\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \mu\right) \cdot d\tau = d\tau \cdot \cos\mu.$$

Führt man jetzt die Werthe für $d\alpha$, $d\beta$ in die obige Gleichung ein, so wird

$$d\omega^2 = (d\sigma + d\mu)^2 + d\tau^2 \cdot \cos^2\mu.$$

§ 6. Sphärische Torsion. Der Winkel $d\omega$, welcher zugleich der Winkel der beiden zu den Radien KM und $K'M'$ senkrechten Tangentenebenen zweier aufeinanderfolgenden Schmiegungskugeln ist, misst die Abweichung der Curve von der Kugelfläche; den reciproken Werth einer Länge S, welche durch die Gleichung $S \cdot d\omega = ds$ bestimmt wird, nämlich:

$$\frac{1}{S} = \frac{d\omega}{ds}$$

nennen wir die sphärische Torsion der Curve im Punkte M und die Linie S selbst, nämlich:

$$S = \frac{ds}{d\omega}$$

den Radius der sphärischen Torsion.*

§ 7. Bogenelement der Curve der Schmiegungskugelmittelpunkte. Das Bogenelement $KK' = d\overset{*}{s}$ der Curve der Schmiegungskugelmittelpunkte erhält man leicht, indem man von K auf den Radius $M'K'$ ein Perpendikel KQ fällt (Fig. 22). Es ist nämlich:

$$MK = \overset{*}{R},\ M'K' = \overset{*}{R} + d\overset{*}{R} \quad \text{und} \quad MK = M'K = M'Q,$$

$$\text{mithin } K'Q = d\overset{*}{R}; \text{ ferner ist } \sphericalangle M'K'C' = \frac{\pi}{2} - (\mu + d\mu)$$

und daher in dem unendlich kleinen rechtwinkligen Dreiecke $KK'Q$

$$K'Q : KK' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \mu - d\mu\right) = \sin\mu$$

und hieraus

$$d\overset{*}{s} = \frac{d\overset{*}{R}}{\sin\mu}.$$

Nun ist aber

$$\sin\mu = \frac{h}{\overset{*}{R}},\quad h = \frac{d\varrho}{d\sigma} = \frac{r\,d\varrho}{ds},$$

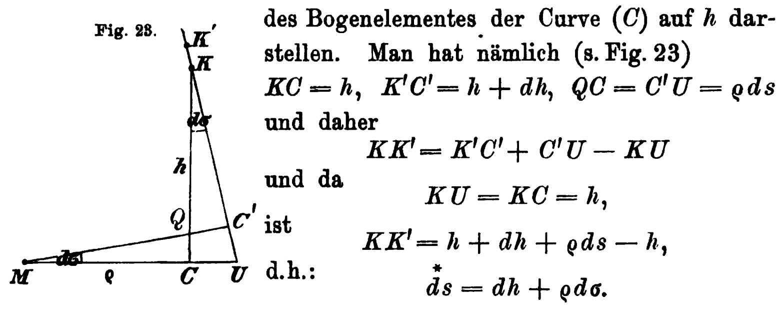
daher schliesslich

$$d\overset{*}{s} = \frac{\overset{*}{R}d\overset{*}{R}}{d\varrho} \cdot d\sigma = \frac{\overset{*}{R}d\overset{*}{R}}{r\,d\varrho}\,ds.$$

---

* Vergl. Schell: Ueber die Schmiegungskugel und die sphärische Torsion der Curven doppelter Krümmung. (Archiv für Mathem. u. Physik v. Grunert. Thl. XIX. S. 393.)

Man kann das Bogenelement $\overset{*}{ds}$ auch durch das Differential des Abstandes $h = CK$ der Curven (K) und (C) und die Projection des Bogenelementes der Curve (C) auf h darstellen. Man hat nämlich (s. Fig. 23)



$$KC = h, \quad K'C' = h + dh, \quad QC = C'U = \varrho ds$$

und daher

$$KK' = K'C' + C'U - KU$$

und da

$$KU = KC = h,$$

ist

$$KK' = h + dh + \varrho ds - h,$$

d.h.:

$$\overset{*}{ds} = dh + \varrho d\sigma.$$

Nebenbei folgt noch aus dem Dreieck $M'KK'$ (Fig. 22)

$$\overset{*}{R}\,(d\sigma + d\mu) = cotg\,\mu \cdot d\overset{*}{R}$$

und mithin, wenn man für $cotg\,\mu$ seinen Werth $\frac{\varrho}{h}$ oder $\frac{\varrho\, d\sigma}{d\varrho}$ einsetzt:

$$d\sigma + d\mu = \frac{\frac{d\overset{*}{R}}{\overset{*}{R}}}{\frac{d\varrho}{\varrho}} \cdot d\sigma.$$

§ 8. **Die Krümmung der Curve der Schmiegungskugelmittelpunkte.** Die drei Winkel: Contingenzwinkel $\overset{*}{d\tau}$, Schmiegungswinkel $\overset{*}{d\sigma}$ und Winkel der ganzen Krümmung $\overset{*}{dk}$ der Curve (K) haben die Werthe:

$$\overset{*}{d\tau} = d\sigma, \quad \overset{*}{d\sigma} = d\tau, \quad \overset{*}{dk} = dk.$$

Daher sind die Radien der drei Krümmungen für diese Curve:

$$\overset{*}{R} \cdot \frac{d\overset{*}{R}}{d\varrho}, \quad \frac{\overset{*}{R}\varrho}{r} \cdot \frac{d\overset{*}{R}}{d\varrho}, \quad \frac{\overset{*}{R}R}{r} \cdot \frac{d\overset{*}{R}}{d\varrho}.$$

§ 9. **Die Schmiegungskugeln der Filar- und Planevolventen.** Die Gratlinie der Evolutenfläche einer Curve ist der Ort der Mittelpunkte ihrer Schmiegungskugeln. Nun haben alle Filarevolventen eine gemeinsame Evolutenfläche, nämlich die rectificirende Fläche. Daher der Satz:

Die Gratlinie der rectificirenden Fläche einer Curve ist der gemeinschaftliche Ort der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln aller Filarevolventen derselben.

Die Evolutenfläche einer Curve ist ferner auch Evolutenfläche aller Planevolventen ihrer Gratlinie. Daher weiter:

Die Gratlinie der Evolutenfläche einer Curve ist der Ort der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln nicht blos der Curve selbst, sondern auch aller Planevolventen der Gratlinie.

§ 10. Schmiegungsrotationskegel. Jeder Punkt der Krümmungsaxe ist der Mittelpunkt eines Rotationskegels, welcher mit der Curve drei aufeinanderfolgende Punkte M, M', M'' gemein hat, diese also in der zweiten Ordnung berührt. Die Krümmungsaxe ist also gleichzeitig der Ort der Mittelpunkte einer Schaar die Curve in der zweiten Ordnung berührender Kugeln und Rotationskegelflächen. In der Schaar Kegel, welche sämmtlich durch den Krümmungskreis hindurch gehen, sind drei besonders ausgezeichnet, nämlich: 1. die Schmiegungsebene; sie stellt den Kegel dar, dessen Mittelpunkt in den Krümmungsmittelpunkt C fällt, 2. der Cylinder, dessen Erzeugungslinien parallel der Krümmungsaxe laufen; er ist ein Kegel, dessen Mittelpunkt der unendlich ferne Punkt der Krümmungsaxe ist, und 3. ein Kegel, welcher mit der Curve noch einen vierten Punkt M''' gemein hat und sie also in der dritten Ordnung berührt. Diesen Kegel, den wir sofort näher bestimmen wollen, nennen wir den Schmiegungsrotationskegel der Curve im Punkte M, weil er von allen derjenige ist, welcher sich der Curve am innigsten anschmiegt.

Denken wir uns nämlich die Reihe der Kugeln und ihrer Mittelpunkte Γ auf der Krümmungsaxe, sowie die Reihe der Kegel und ihrer Mittelpunkte Σ auf derselben Geraden, so wird jede Kugel von einem gewissen dieser Kegel längs des Krümmungskreises berührt und die Mittelpunkte Γ, Σ dieser Flächenpaare liegen auf entgegengesetzten Seiten der Schmiegungsebene und des Krümmungsmittelpunktes C so, dass das Produkt der Abstände $C\Gamma$, $C\Sigma$ eine Constante, nämlich gleich dem Quadrat des Krümmungshalbmessers ϱ, also

$$C\Gamma \cdot C\Sigma = \varrho^2$$

ist und die Dreiecke $\Sigma M\Gamma$, $\Sigma M'\Gamma$, $\Sigma M''\Gamma$ bei M, M', M'' rechtwinklig sind, d. h. die Kegelseiten senkrecht auf den Radien der Kugel stehen. Rückt der Punkt Γ in den Krümmungsmittelpunkt C, so entfernt sich der Mittelpunkt Σ des berührenden Kegels ins Unendliche und geht dieser in den vorhin erwähnten Cylinder über; rückt Γ ins Unendliche, so fällt Σ in den Krümmungsmittelpunkt

und es gehen die beiden Flächen, Kugel und Kegel in die Schmiegungsebene über. Es bilden die Mittelpunkte Γ der Kugeln und die Mittelpunkte Σ der Kegel eine gleichliegende Punktinvolution auf der Krümmungsaxe mit dem Mittelpunkte des Krümmungskreises als Centralpunkt und dem Quadrate des Krümmungshalbmessers ϱ als Constante dieser Involution. Lassen wir nun die Kugel in die Schmiegungskugel übergehen, also ihren Mittelpunkt Γ in den Durchschnitt K der Krümmungsaxe mit der folgenden Krümmungsaxe fallen. Die Kugel geht alsdann durch die vier aufeinanderfolgenden Punkte M, M', M'', M''', von denen die drei ersten M, M', M'' auf dem Krümmungskreise des Punktes M, der vierte, M''', aber auf dem Krümmungskreise des nächstfolgenden Punktes M' liegt und von dem ersten Krümmungskreis unendlich wenig absteht. Legen wir daher durch die Krümmungsaxe und diesen Punkt eine Ebene, so schneidet sie den ersten Krümmungskreis in einem gewissen Punkte N, welcher dem Punkte M''' unendlich nahe liegt, und es ist folglich eine Gerade, welche durch diese beiden Punkte geht, eine Tangente der Kugel in N, und da sie die Krümmungsaxe schneidet, die Erzeugungslinie eines geraden Kegels, welcher die Kugel längs des Krümmungskreises berührt. Dieser Kegel geht durch die vier Punkte der Curve, welche die Schmiegungskugel mit dieser gemein hat und ist also der obige Schmiegungskegel. Der Abstand seines Mittelpunktes S von dem Krümmungsmittelpunkte C ergiebt sich aus der Gleichung $CS \cdot CK = \varrho^2$, und wenn wir ihn mit k bezeichnen und für $CK = h$ seinen Werth einsetzen, so wird er

$$k = \frac{\varrho^2}{h} = \varrho^2 \cdot \frac{d\sigma}{d\varrho} = \frac{\varrho^2}{r} \cdot \frac{ds}{d\varrho}.$$

Die Neigung der Kegelseite SM gegen die Schmiegungsebene ist $\frac{\pi}{2} - \mu$ und folglich ihre Neigung gegen die Krümmungsaxe selbst gleich μ. Da auch die Tangente der Curve der Krümmungsmittelpunkte mit der Krümmungsaxe denselben Winkel μ bildet, so bildet diese Axe mit ihr und der Kegelseite ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis in die Krümmungsaxe fällt.

§ 11. Die Betrachtung des Schmiegungskegels zeigt, dass **jede Curve doppelter Krümmung in Bezug auf drei aufeinanderfolgende Elemente als auf einem geraden Kegel liegend angesehen werden kann.**

Ist die Curve eben, so wird $h = \infty$, mithin $k = o$, der Schmiegungskegel fällt mit der Ebene der Curve zusammen. Ist die Curve sphärisch, so wird der Radius der Schmiegungskugel constant und da $KS \cdot KC = \overset{*}{R}^2$, so wird die Entfernung KS des Kegelmittelpunkts vom Mittelpunkt der Kugel, auf welcher die Curve liegt, nämlich:

$$KS = \frac{\overset{*}{R}^2}{KC}$$

umgekehrt proportional dem Abstand der Schmiegungsebene vom Mittelpunkt der Kugel.

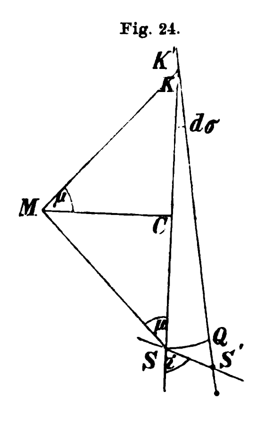
Ist ϱ constant, so wird $h = o$ und also $k = \infty$, d. h. der Schmiegungskegel ist ein Cylinder, die Curve kann hinsichtlich dreier Elemente als cylindrisch angesehen werden.

§ 12. Curve der Mittelpunkte der Schmiegungsrotationskegel. Die continuirliche Folge der Mittelpunkte der Schmiegungskegel bildet auf der Fläche der Krümmungsaxen eine Curve S; zwischen ihr und der Curve K liegt die Curve C inne und zwar so, dass immer

$$CK \cdot CS = \varrho^2, \; KS \cdot KC = \overset{*}{R}^2$$

ist. Diese Curve ist keine Evolute. Denn sind S, S' (Fig. 24) zwei aufeinanderfolgende Punkte derselben, also SS' ihre Tangente, so sieht man leicht, dass diese nicht mit der Kegelseite MS zusammenfallen kann. Sind nämlich K, K' die den Punkten S, S' correspondirenden Punkte der Curve (K) und beschreibt man um K mit KS den kleinen Bogen KQ, so wird

Fig. 24.



$$QS' = K'S' - KQ - KK' = K'S' - KS - KK' = d(SK) + \overset{*}{d}s = d\left(\frac{\overset{*}{R}^2}{h}\right) + \overset{*}{d}s$$

und

$$QS = KS \cdot d\sigma = \frac{\overset{*}{R}^2}{h} \cdot d\sigma,$$

mithin, wenn i die Neigung der Tangente der Curve S gegen die Krümmungsaxe SK ist,

$$cotg\, i = \frac{d\left(\frac{\overset{*}{R}^2}{h}\right)}{\frac{\overset{*}{R}^2}{h}\cdot d\sigma} + \frac{\overset{*}{d s}}{\frac{\overset{*}{R}^2}{h}\cdot d\sigma},$$

während für die Neigung der Kegelseite MS gegen dieselbe Axe die Gleichung

$$cotg\, \mu = \frac{\varrho}{h}$$

besteht.

Die Länge der Kegelseite MS ist $MS = \frac{\overset{*}{R}\varrho}{h}$. Ist sie constant, so ist die Curve S zugleich der Ort der Mittelpunkte einer Schaar Kugeln von constantem Radius, welche die Curve in der zweiten Ordnung berühren.

VI. Capitel.

Die rectificirende Fläche.

§ 1. Abwickelung der rectificirenden Fläche und Verwandlung der Curve in eine Gerade. Die Schmiegungsebene und die rectificirende Ebene sind ein Paar zu einander rechtwinklige Tangentenebenen der Curve. Die rectificirende Ebene steht senkrecht auf der Hauptnormalen (dem Krümmungshalbmesser). Vgl. Cap. I, §§ 4 u. 8. Zwei aufeinanderfolgende rectificirende Ebenen schneiden sich in der rectificirenden Geraden, einer Linie, welche senkrecht ist zu zwei aufeinanderfolgenden Krümmungshalbmessern oder also senkrecht zu der Ebene, welche diesen beiden parallel läuft, der Ebene der ganzen Krümmung (Cap. II, § 16).

Lässt man eine Ebene so an der Curve hingleiten, dass sie fortwährend rectificirende Ebene bleibt, so erzeugt sie die rectificirende Fläche, welche abwickelbar ist und die sämmtlichen rectificirenden Geraden der Curve als Erzeugungslinien enthält. Der Name dieser Fläche rührt daher, dass sie die Eigenschaft hat, durch ihre Abwickelung die Curve in eine Gerade zu verwandeln. Bei dieser Abwickelung fallen nämlich nach und nach die rectificirenden Ebenen der Punkte M, M', M'', M''', ... der Curve zusammen, indem jede um die Durchschnittslinie mit der folgenden, d. h. um die rectificirende Gerade gedreht wird, bis der Winkel beider verschwindet. Da die Hauptnormalen zu diesen Ebenen senkrecht sind, so werden sie durch die Abwickelung sämmtlich parallel. Nun liegt

die Hauptnormale des Punktes M in der Schmiegungsebene $MM'M''$ dieses Punktes, welche durch die Tangenten in M und M' geht und senkrecht steht auf der rectificirenden Ebene von M, und da nach der Drehung der rectificirenden Ebene um die rectificirende Gerade die folgende Hauptnormale mit ihr parallel wird, so fällt dadurch auch diese in die Schmiegungsebene von M. Sie liegt aber auch in der folgenden Schmiegungsebene $M'M''M'''$, welche durch die Tangenten in M' und M'' geht, und da diese Ebene durch sie und die Tangente in M' bestimmt ist und von diesen beiden Linien die Tangente bereits in der ersten Schmiegungsebene liegt, die andere, die Hauptnormale, durch die Drehung in sie gelangt, so fällt auch die zweite Schmiegungsebene mit der ersten zusammen, und da diese vereinigten Schmiegungsebenen auf den vereinigten rectificirenden Ebenen senkrecht stehen, so fallen auch ihre Durchschnittslinien, nämlich die Tangenten der Punkte M und M' zusammen. In gleicher Weise fällt bei der Drehung der jetzt vereinigten rectificirenden Ebenen um die folgende rectificirende Gerade, die Tangente von M'' mit der vorhergehenden zusammen, desgleichen durch eine Drehung der drei vereinigten Ebenen um die nächste rectificirende Gerade die Tangente von M''' mit der Tangente von M'' u. s. f. Man sieht hieraus, dass durch die Abwickelung der rectificirenden Fläche nach und nach alle Tangenten der Curve in eine Gerade und alle Schmiegungsebenen in eine Ebene zusammenfallen, d. h. dass die Curve in eine Gerade übergeht.

Man hätte diesen Satz auch folgendermassen beweisen können. Zwei aufeinanderfolgende rectificirende Ebenen bilden mit einander den Winkel dk der beiden auf ihnen senkrechten Hauptnormalen und es ist nach dem Lancret'schen Satze $dk^2 = d\tau^2 + d\sigma^2$. Durch die Abwickelung verschwindet dk; dies ist nicht anders möglich, als dadurch, dass gleichzeitig $d\tau$ und $d\sigma$ verschwinden. Wenn aber der Contingenzwinkel und Schmiegungswinkel einer Curve verschwinden, so wird sie eine Gerade.

Auch ist der Beweis bereits in den Entwickelungen von Cap. IV, § 3 enthalten. Denn die rectificirende Fläche ist die Evolutenfläche aller Filarevolventen. Die Curve selbst ist eine gemeinsame Evolute aller dieser. Bei der Abwickelung der Evolutenfläche gehen aber alle Evoluten in gerade Linien über, also auch die Curve selbst.

§ 2. Statische Bedeutung der rectificirenden Fläche. Da die Curve durch Abwickelung der rectificirenden Fläche in eine Gerade übergeht, so ist sie selbst eine kürzeste Linie auf dieser Fläche. Die rectificirende Fläche erlangt dadurch eine statische Bedeutung für die Curve. Die kürzeste Linie auf irgend einer Fläche besitzt nämlich die Eigenschaft, dass eine vollkommen biegsame Linie längs ihr auf der Fläche ohne Reibung eine Gleichgewichtslage hat, wenn ihre Enden durch gleiche Kräfte gespannt werden.* Es ist daher das geometrische Problem, die rectificirende Fläche einer Curve zu finden, identisch mit dem statischen Problem, diejenige abwickelbare Fläche zu bestimmen, auf welcher sich die Curve im Gleichgewicht befinden würde, wenn sie in der Richtung zweier ihrer Tangenten durch gleiche Kräfte gespannt wird.

Die rectificirende Fläche ist übrigens nicht die einzige Fläche, welche durch die Curve gelegt werden kann, auf welcher diese eine kürzeste Linie ist. Jede Fläche, welche die rectificirende Fläche längs der Curve berührt, hat diese Eigenschaft. Denn die Hauptnormale der Curve steht auf der rectificirenden Ebene, also auf der Tangentenebene aller solcher Flächen senkrecht.

§ 3. Die Fläche der Krümmungsaxen als rectificirende Fläche aller Evoluten. Jede Curve hat nur eine einzige rectificirende Fläche, denn sie hat in jedem Punkte nur eine einzige rectificirende Ebene. Dagegen ist jede abwickelbare Fläche rectificirende Fläche für alle ihre kürzesten Linien, d. h. für alle Curven,

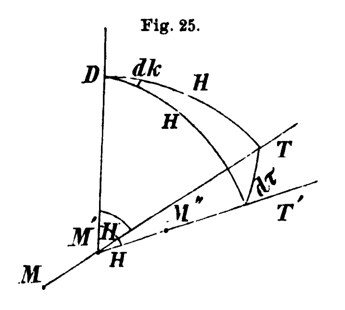
* Denn damit irgend ein Punkt des Fadens im Gleichgewichte sei, müssen die Spannungen längs den Tangenten der Curve, die sich in dem Punkte schneiden mit dem normalen Widerstande der Fläche im Gleichgewicht sein. Es muss folglich die Resultante dieser Spannungen die Richtung der Linie haben, welche den von 180° unendlich wenig abweichenden Winkel der Tangenten halbirt und also mit den Richtungen dieser Kräfte in einer Ebene liegen, welche durch die Normale der Fläche geht. Jene Winkelhalbirende aber ist in der Grenze eine Normale der Curve in dem Endpunkte eines der Bogenelemente, welche in dem betrachteten Punkte zusammenstossen, und da sie in die Ebene dieser Elemente, nämlich in die Schmiegungsebene der Curve fällt, die Hauptnormale der Curve. Da die Resultante dem Normaldruck der Fläche Gleichgewicht halten muss, so muss also die Hauptnormale der Curve zugleich Normale der Fläche, also die Schmiegungsebene eine Normalebene der Fläche und die Curve folglich eine kürzeste Linie sein. (Vergl. Cap. IV, § 3 Anm.)

deren Hauptnormalen zugleich Normalen der Fläche sind, oder deren Schmiegungsebenen die Tangentenebenen der Fläche rechtwinklig schneiden. So ist die Fläche der Krümmungsaxen gemeinsame rectificirende Fläche für alle auf ihr liegende Evoluten.

§ 4. Zerstörung der Krümmungen durch die Abwickelung der Flächen der Tangenten, Krümmungsaxen und der rectificirenden Fläche. Die Tangentenfläche, die Fläche der Krümmungsaxen und die rectificirende Fläche haben eine intime Beziehung zu den Krümmungen der Curve. Durch Abwickelung der ersteren wird der Schmiegungswinkel und mit ihm die Schmiegung oder zweite Krümmung, durch Abwickelung der zweiten der Contingenzwinkel und mit ihm die erste Krümmung, durch Abwickelung der retificirenden Fläche aber werden beide Krümmungen zugleich, oder die ganze Krümmung der Curve zerstört. Durch Abwickelung der ersten und dritten Fläche geschieht dies an der Curve selbst, durch Abwickelung der zweiten an einer Curve, welche ihren Contingenzwinkel zum Schmiegungswinkel hat.

§ 5. Winkel der rectificirenden Geraden und der Tangente. Es seien $MT, M'T'$ (Fig. 25) zwei aufeinanderfolgende Tangenten der Curve (M) und $M'D$ die Schnittlinie der beiden aufeinanderfolgenden rectificirenden Ebenen $DM'T$ und $DM'T'$, von denen die erste auf der Schmiegungsebene $TM'T$, die zweite auf der folgenden Schmiegungsebene senkrecht steht. Die Tangenten bilden mit einander den Contingenzwinkel $d\tau$, die rectificirenden Ebenen den Winkel dk der auf ihnen senkrecht stehenden Hauptnormalen in M und M'. Da durch die Abwickelung der rectificirenden Fläche, bei welcher die beiden rectificirenden Ebenen zusammenfallen, die Curve (M) in eine Gerade übergeht, so fallen hierbei die beiden Tangenten $M'T$, $M'T'$ zusammen und bildet die rectificirende Gerade $M'D$ mit beiden denselben Winkel H. Eine um M' beschriebene Einheitskugel liefert daher ein gleichschenkliges unendlich schmales Dreieck DTT', in welchem

Fig. 25.



$$dk \cdot \sin H = d\tau,$$

woraus

$$\sin H = \frac{d\tau}{dk} = \frac{R}{\varrho}$$

und da

$$d\tau^2 + d\sigma^2 = dk^2 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{d\tau}{dk}\right)^2 + \left(\frac{d\sigma}{dk}\right)^2 = 1$$

ist,

$$\cos H = \frac{d\sigma}{dk} = \frac{R}{r}$$

und

$$tg\, H = \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{r}{\varrho}$$

folgt.

Dies Resultat wurde bereits Cap. II, § 13 aus anderen Gründen gefunden. Es kann auch aus dem unendlich kleinen Lancret'schen Dreieck Cap. II, § 10 abgeleitet werden. Denn es steht die Tangente auf der Ebene des Winkels $d\sigma$ und die rectificirende Gerade auf der Ebene des Winkels dk (der Ebene der ganzen Krümmung) senkrecht, mithin bilden in jenem Dreieck die Seiten $d\sigma$ und dk denselben Winkel H mit einander, wie die Tangente und die rectificirende Gerade und ist $tg\, H = \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{r}{\varrho}$. Ein unendlich kleines Rechteck, welches von zwei unendlich kleinen Linien $d\tau$, $d\sigma$ gebildet wird, welche auf der Binormalen und der Tangente aufgetragen gedacht werden können, liefert daher durch seine Diagonale die rectificirende Gerade. Dieser Figur ist die Figur 14a Cap. II, § 13 ähnlich, welche dieselbe Gerade dortselbst lieferte.

Wir bemerken noch besonders die Eigenschaft der rectificirenden Geraden, dass sie mit zwei aufeinanderfolgenden Tangenten MT, $M'T'$ denselben Winkel H bildet und dass H zugleich ihr Neigungswinkel gegen die Schmiegungsebene ist, in welcher diese beiden Tangenten liegen.

§ 6. Gerade und Ebene, welche mit drei aufeinanderfolgenden Tangenten oder Binormalen und drei aufeinanderfolgenden Normal- oder Schmiegungsebenen gleiche Winkel bildet. Es ist die rectificirende Gerade die Grenzlage einer Geraden, welche mit drei aufeinanderfolgenden Tangenten gleiche Winkel bildet. Denn die rectificirende Ebene kann angesehen werden als die Ebene, welche auf der Schmiegungsebene senkrecht stehend den Contingenzwinkel halbirt. Sie ist daher der Ort aller Geraden, welche durch den Curvenpunkt hindurchgehen und mit den beiden sich in diesem schneidenden

Tangenten gleiche Winkel bildet. Ebenso ist die Ebene, welche den Contingenzwinkel des folgenden Punktes senkrecht zu seiner Ebene halbirt, der Ort aller Geraden, welche durch diesen hindurchgehend mit der zweiten und dritten Tangente gleiche Winkel bilden. Daher hat die Durchschnittslinie beider Halbirungsebenen die Richtung einer Geraden, welche mit drei aufeinanderfolgenden Tangenten gleiche Winkel bildet. Diese Durchschnittslinie ist aber in der Grenze keine andere, als die rectificirende Gerade.

Auf den drei Tangenten stehen die drei ihnen entsprechenden Normalebenen und auf der rectificirenden Geraden steht die Ebene der ganzen Krümmung senkrecht. Daher ist die Ebene der ganzen Krümmung die Grenzlage einer Ebene, welche mit drei aufeinanderfolgenden Normalebenen gleiche Winkel bildet.

Diese Betrachtungen lassen sich auch auf die Binormalen übertragen. Drei aufeinanderfolgende Binormalen sind drei aufeinanderfolgenden Krümmungsaxen parallel. Die Krümmungsaxen sind die Tangenten der Curve der Schmiegungskugelmittelpunkte und die rectificirende Gerade dieser Curve ist mithin die Grenzlage einer Geraden, welche mit drei Krümmungsaxen gleiche Winkel bildet. Nun haben aber die primitive Curven und die Curve der Schmiegungskugelmittelpunkte parallele rectificirende Ebenen, also auch parallele rectificirende Geraden. Daher ist die rectificirende Gerade der primitiven Curve die Grenzlage einer Geraden, welche mit drei aufeinanderfolgenden Binormalen gleiche Winkel bildet. Da die Binormalen auf den Schmiegungsebenen senkrecht stehen und die rectificirende Gerade zu der Ebene der ganzen Krümmung rechtwinklig ist, so folgt, dass die Ebene der ganzen Krümmung die Grenzlage einer Ebene ist, welche mit drei aufeinanderfolgenden Schmiegungsebenen gleiche Winkel bildet.

§ 7. Die rectificirende Fläche als Ort der Krümmungsmittelpunkte der Normalschnitte stärkster Krümmung der Tangentenfläche. Wir haben bereits Cap. III, § 7 bemerkt, dass die Evolventen die Linien stärkster Krümmung auf der Tangentenfläche sind, dass sich mithin die Normalen der Fläche längs einer Evolvente schneiden und eine abwickelbare Fläche bilden. Ein solcher Durchschnitt zweier Normalen ist der Krümmungsmittelpunkt

des durch die Tangente der Evolvente geführten Normalschnitts der Fläche und die Gratlinie jener abwickelbaren Fläche der Normalen, also der Ort dieser Krümmungsmittelpunkte für eine Evolvente und also die Fläche, auf welcher alle solche Gratlinien liegen, der Ort der Mittelpunkte der stärksten Krümmung für die ganze Tangentenfläche. Ist nun PP' das Element einer Evolvente, welche dem Abstande $MP = p$ von der Curve M entspricht, so ist der Contingenzwinkel des durch dies Element geführten Normalschnitts der Tangentenfläche der Neigungswinkel zweier Tangentenebenen der Fläche, d. h. der Schmiegungswinkel $d\sigma$ der Curve M, mithin der Krümmungshalbmesser des Normalschnitts

$$\varrho_0 = \frac{PP'}{d\sigma}$$

oder da $PP' = p \cdot d\tau$ ist

$$\varrho_0 = p \cdot \frac{d\tau}{d\sigma} = p \cdot \frac{r}{\varrho} = p \cdot tg\, H.$$

Dieser Krümmungshalbmesser hat die Richtung der Normalen der Tangentenfläche in P, fällt also in die rectificirende Ebene der Curve M und ist also die Länge des Perpendikels, welches in P in der rectificirenden Ebene errichtet werden kann von P bis zum Durchschnitt mit der rectificirenden Geraden. Daher liegt der Krümmungsmittelpunkt des Normalschnitts der Tangentenfläche auf der rectificirenden Geraden und ist diese der Ort für die Krümmungsmittelpunkte aller solcher Normalschnitte längs der Tangente MP; d. h.:

Die rectificirende Gerade des Punktes M ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte aller durch die Punkte der Tangente von M geführten Normalschnitte stärkster Krümmung der Tangentenfläche und

Die rectificirende Fläche ist der Ort der Mittelpunkte stärkster Krümmung der Tangentenfläche.

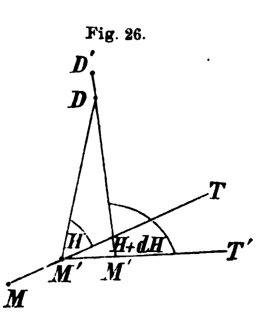
§ 8. Die rectificirende Fläche als Evolutenfläche der Filarevolventen. Wir haben Cap. III, § 3 gezeigt, dass die rectificirende Fläche der Ort der Krümmungsaxen aller Filarevolventen der Curve M ist. Mit Rücksicht auf Cap. IV, § 2 folgt hieraus:

Die rectificirende Fläche einer Curve ist die Fläche der Evoluten aller ihrer Filarevolventen und:

Die Gratlinie der rectificirenden Fläche ist der Ort der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln aller Filarevolventen der Curve.

§ 9. **Contingenzwinkel, Schmiegungswinkel und Winkel der ganzen Krümmung der Gratlinie der rectificirenden Fläche.** Um den Winkel zweier aufeinanderfolgender rectificirender Geraden, d. h. den Contingenzwinkel $d\tau_3$ der Gratlinie der rectificirenden Fläche, die wir kurz die rectificirende Gratlinie nennen wollen, zu finden, seien $M'D$, $M''D'$ (Fig. 26) die beiden rectificirenden Geraden der Punkte M, M', welche sich in D schneiden. Sie bilden mit den Tangenten der Punkte M, M' die Winkel $DM'T = H$ und $DM''T' = H + dH$. Dreht man die rectificirende Ebene $DM''T'$ um die rectificirende Gerade DM' um, bis sie in die rectificirende Ebene $DM'T$ fällt, so fällt die Tangente $M'T'$ in die Tangente MT, weil bei der Abwickelung der rectificirenden Fläche alle Tangenten der Curve zusammenfallen. Hieraus folgt, dass Winkel $DM'T' = DM'T = H$ ist. Aus dem Dreieck $DM'M''$ ergiebt sich daher weiter Winkel $M'DM'' = DM''T' - DM'T'$ oder $d\tau_3 = dH$, d. h:

Fig. 26.



Der Contingenzwinkel der rectificirenden Gratlinie ist gleich dem Differentiale des Winkels, welchen die rectificirende Gerade mit der Tangente bildet.

Hierzu kommt noch zufolge § 1:

Der Schmiegungswinkel $d\sigma_3$ der rectificirenden Gratlinie ist gleich dem Winkel der ganzen Krümmung der Curve, nämlich $d\sigma_3 = dk$. Für den Winkel der ganzen Krümmung der rectificirenden Gratlinie hat man daher $dk_3^2 = dk^2 + dH^2$.

§ 10. **Entfernung L des Punktes D der rectificirenden Gratlinie vom entsprechenden Punkt M der Curve.** Fällt man von M' auf $M''D'$ das Perpendikel $M'\mu$ (Fig. 27), so wird $M'\mu = L \cdot dH = M'M'' \cdot \sin(H + dH)$ oder also wegen $M'M'' = ds$ auch $L dH = ds \sin H$ und folglich:

$$L = \frac{ds}{dH} \cdot \sin H = \frac{R}{\varrho} \frac{ds}{dH} \ (\S\ 5).$$

Fig. 27.

Diese Formel lässt eine einfache Deutung zu. Beschreibt man in der rectificirenden Ebene um $M'M''D$ einen Kreis, so ist er in der Grenze ein Kreis, welcher die Tangente in M berührt und den Winkel dH als Peripheriewinkel fasst.

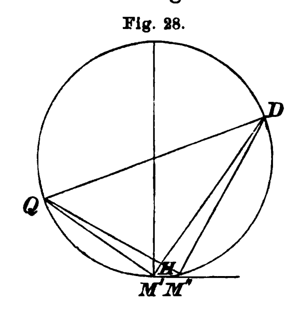
Sein Mittelpunkt liegt in der Binormalen und sein Durchmesser P folgt aus $PdH = ds$, nämlich $P = \frac{ds}{dH}\cdot$ Hiermit wird

$$L = P\, sin\, H = \frac{R}{\varrho} \cdot P.$$

Es ist daher L die Projection von P auf die rectificirende Gerade.

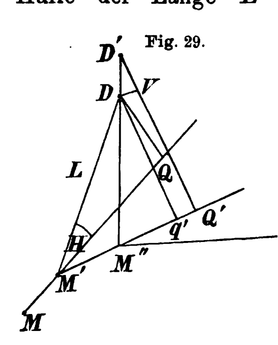
Errichtet man in M' auf $M'D$ ein Perpendikel $M'Q$ (Fig. 28), welches den genannten Kreis in Q schneidet, so wird $M'Q$ oder in der Grenze $MQ = P\, cos\, H$. Dieser Punkt Q des Kreises hat eine besondere Bedeutung. Die Ebene der ganzen Krümmung in M steht senkrecht auf der rectificirenden Geraden $M'D$, die Ebene der ganzen Krümmung in M' senkrecht auf $M''D'$. Beide Ebenen schneiden die rectificirende Ebene von M in den Geraden $M'Q$, $M''Q$ und sich selbst in einer auf der rectificirenden Ebene in Q senkrecht stehenden Geraden. Die Ebene der ganzen Krümmung erzeugt eine abwickelbare Fläche und die Erzeugungslinien dieser Fläche gehen durch die Punkte Q. Sie sind parallel den Hauptnormalen der Curve und stehen von diesen um die Strecke $P\, cos\, H = \frac{R}{r} P$ ab.

Fig. 28.



§ 11. Bogenelement der rectificirenden Gratlinie. Mit Hülfe der Länge L findet man das Bogenelement $DD' = ds_3$ (Fig. 29) der rectificirenden Gratlinie folgendermassen. Vom Punkte D fällen wir auf die Tangente in M das Perpendikel $DQ = p = L \cdot sin\, H$; ebenso von D' auf die Tangente in M' das Perpendikel $D'Q' = p + dp$; ein drittes Perpendikel Dq' von D auf die Tangente in M' wird gleich $DQ = p$ wegen der Congruenz der Dreiecke $DM'Q$ und $DM'q'$, welche beide bei M' den Winkel H enthalten. Zieht man nun noch DV parallel mit $q'Q'$, so erhält man im rechtwinkligen Dreieck DVD':

Fig. 29.



$$DD' \cdot \sin(H + dH) = D'V$$

und folglich, wegen

$$D'V = D'Q' - Dq' = D'Q' - DQ = dp$$

$$ds_3 = \frac{dp}{\sin H} = \frac{d \cdot L \sin H}{\sin H}.$$

§ 12. Die Radien ϱ_3, r_3, R_3 der rectificirenden Gratlinie. Mit Hülfe der in den §§ 9, 10 entwickelten Ausdrücke für ds_3, $d\tau_3$, $d\sigma_3$, dk_3 erhält man für die Radien der Krümmung, Schmiegung und ganzen Krümmung der rectificirenden Gratlinie:

$$\varrho_3 = \frac{1}{\sin H} \cdot \frac{dp}{dH}, \quad r_3 = \frac{1}{\sin H} \cdot \frac{dp}{dk}, \quad R_3 = \frac{1}{\sin H} \cdot \frac{dp}{\sqrt{dk^2 + dH^2}}.$$

§ 13. Specielle Fälle der rectificirenden Fläche und davon abhängige Sätze über die Krümmungsverhältnisse der Curve. Die Beschaffenheit der rectificirenden Fläche ist von grossem Einfluss auf die Beschaffenheit der Curve und umgekehrt. In dieser Hinsicht lassen sich eine Reihe interessanter Sätze aufstellen, von denen wir die folgenden besonders herausheben:

I. Ist der Winkel H constant, so ist die rectificirende Fläche ein Cylinder und die Curve eine Helix (eine Curve, welche gegen die Erzeugungslinien constante Neigung hat) auf ihm. Es ist nämlich in diesem Falle der Contingenzwinkel dH der rectificirenden Gratlinie gleich Null, also sind je zwei aufeinanderfolgende rectificirende Geraden, also alle rectificirenden Geraden unter einander parallel; weil H constant ist, sind die Tangenten oder Bogenelemente der Curve gegen die Erzeugungslinien alle unter demselben Winkel geneigt. Ist $H = 90^0$, so ist die Curve eben. — Ist die rectificirende Fläche eine Cylinderfläche, so sind die Filarevolventen der Curve ebene Curven. Denn die Schmiegungsebenen einer solchen Evolvente stehen senkrecht auf den rectificirenden Geraden und fallen, da sie je drei aufeinanderfolgende Punkte mit der Evolvente gemein haben, zusammen. Die Tangenten der Curve schneiden die Ebene der Evolventen unter einem constanten Winkel, welcher den Neigungswinkel der Tangenten gegen die rectificirenden Geraden zu $\frac{1}{2}\pi$ ergänzt.

II. Ist die rectificirende Fläche ein Cylinder, so ist die Curve eine Helix desselben. Denn da die rectificirenden Geraden parallel sind, so ist $dH = 0$, also H constant.

III. Lässt sich durch die Curve eine Cylinderfläche legen, gegen deren Erzeugungslinien sie unter constantem Winkel geneigt ist, so ist diese die rectificirende Fläche der Curve. Denn wegen der constanten Neigung der Bogenelemente und Tangenten der Curve gegen die Erzeugungslinien des Cylinders geht die Curve bei der Abwickelung desselben in eine Gerade über, indem alle Tangenten zusammenfallen, und da eine Curve nur eine rectificirende Fläche haben kann, so kann diese nur jener Cylinder sein. Es ist leicht zu sehen, dass keine andere abwickelbare Fläche, gegen deren Erzeugungslinien die Tangenten der Curve constante Neigung haben, rectificirende Fläche sein kann, denn zwei Tangenten bilden mit derselben Erzeugungslinie verschiedene Winkel, deren Differenz gleich dem Contingenzwinkel der Gratlinie dieser Fläche ist.

IV. Ist die rectificirende Fläche ein Cylinder, also die Curve eine Helix, so laufen alle Hauptnormalen einer Ebene parallel. Die rectificirende Gerade steht nämlich senkrecht auf der Ebene der ganzen Krümmung, nämlich der Ebene, welche zweien aufeinanderfolgenden Hauptnormalen parallel ist. Sind nun die rectificirenden Geraden parallel, so sind auch alle diese Ebenen parallel und also alle Hauptnormalen parallel zu ihnen.

V. Laufen die Hauptnormalen einer Curve einer Ebene parallel, so ist die rectificirende Fläche ein Cylinder und die Curve eine Helix. Diese Curven sind daher die einzigen, denen die Eigenschaft IV zukommt.

VI. Ist die rectificirende Fläche ein Cylinder oder die Curve eine Helix, so ist das Verhältniss ihrer ersten und zweiten Krümmung oder das Verhältniss der diesen entsprechenden Radien constant. Denn es ist:

$$\frac{d\tau}{ds} : \frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{r}{\varrho} = tg\, H,$$

also constant, weil H constant ist.

VII. Ist das Verhältniss der ersten und zweiten Krümmung einer Curve constant, so ist diese eine Helix.* Diese Curvengattung ist die einzige, der diese Eigenschaft zukommt.

* Liouville, Note sur les courbes à double courbure in den Anmerkungen zu seiner Ausgabe von Monge Applications u. s. w. S. 558, woselbst ein Brief von Serret über diesen und ähnliche Sätze abgedruckt ist.

Ist der Winkel H constant, so sind die Verhältnisse

$$d\tau : d\sigma : dk = \frac{1}{\varrho} : \frac{1}{r} : \frac{1}{R}$$

ebenfalls constant; es sei insbesondere

$$\frac{d\tau}{dk} = \sin H = \varepsilon.$$

Schneiden wir den rectificirenden Cylinder mit einer Ebene senkrecht zu den Erzeugungslinien, so ist das Bogenelement ds_0 dieses orthogonalen Schnittes die Projection des Bogenelements ds der Helix und mithin, da diese unter dem constanten Winkel H gegen die Erzeugungslinie geneigt ist,

$$\frac{ds}{ds_0} = \frac{1}{\sin H} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Es ist ferner der Contingenzwinkel des orthogonalen Schnittes gleich dem Winkel zweier Tangentenebenen des Cylinders, und da dieser die rectificirende Fläche der Helix ist, gleich dk; daher ist der Krümmungshalbmesser ϱ_0 dieses Schnittes

$$\varrho_0 = \frac{ds_0}{dk}.$$

Hieraus folgt in Verbindung mit dem Ausdrucke des Krümmungshalbmessers ϱ für die Helix, $\varrho = \frac{ds}{d\tau}$, die Proportion:

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{ds}{d\tau} : \frac{ds_0}{dk} = \frac{ds}{ds_0} \cdot \frac{dk}{d\tau},$$

und daher weiter mit Rücksicht auf die beiden vorigen Gleichungen

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\varepsilon^2} = \frac{\varrho_0}{\sin^2 H},$$

d. h.:

VII. Ist die Curve eine Helix, so ist ihr Krümmungshalbmesser proportional dem Krümmungshalbmesser des Orthogonalschnitts des rectificirenden Cylinders und wird erhalten, wenn man diesen durch das Quadrat des Sinus der Neigung der Helix gegen die Erzeugungslinien des Cylinders dividirt.

Da

$$\frac{r}{\varrho} = tg\, H, \quad \frac{R}{\varrho} = \sin H$$

ist, so folgt noch

$$r = \varrho \cdot tg\, H = \frac{\varrho_0}{\sin H \cos H}$$

$$R = \varrho \cdot \sin H = \frac{\varrho_0}{\sin H},$$

d. h.: auch der Schmiegungsradius und der Radius der ganzen Krümmung sind proportional dem Krümmungs-

halbmesser ϱ_0 des Orthogonalschnittes. Ist ϱ_0 constant, so sind also die Radien der drei Krümmungen der Helix constant.

VIII. Sind der Krümmungshalbmesser und der Schmiegungshalbmesser einer Curve beide constant, so ist die Curve eine Helix eines Kreiscylinders.* Denn es ist dann sowohl $\varrho = \frac{ds}{d\tau}$, als auch $r = \frac{ds}{d\sigma}$ constant, mithin auch $\frac{r}{\varrho} = \frac{d\tau}{d\sigma} = \sin H$. Ferner ist auch $\varrho_0 = \varrho \cdot \sin^2 H$ constant, mithin der Orthogonalschnitt ein Kreis.

Die Curven constanten Krümmungshalbmessers werden in den folgenden Capiteln nähere Berücksichtigung finden.

IX. Lässt sich durch eine Curve eine abwickelbare Fläche legen, auf welcher sie kürzeste Linie ist, so ist diese Fläche die rectificirende Fläche derselben. Denn es stehen dann alle Hauptnormalen auf den Tangentenebenen der Fläche senkrecht.

X. Lässt sich durch eine Curve eine abwickelbare Fläche legen, mit deren Erzeugungslinien sie Winkel bildet, die fortwährend um den Contingenzwinkel ihrer Gratlinie wachsen oder abnehmen, so ist die Fläche die rectificirende Fläche. Denn bei der Abwickelung der Fläche fallen die Tangenten der Curve zusammen.

XI. Ist die rectificirende Fläche einer Curve eine Kegelfläche, so berühren die Tangenten der Curve eine mit der Kegelfläche concentrische Kugel. Denn da sich die rectificirende Gratlinie auf einen Punkt D, den Mittelpunkt des Kegels reducirt, so ist ihr Bogenelement (s. § 11)

$$ds_3 = dp : \sin H = 0, \quad \text{also} \quad dp = 0$$

und folglich p constant, d. h. der Abstand der Tangenten der Curve vom Mittelpunkte der Kegelfläche ist constant, $p = c$.

Die Abwickelung der rectificirenden Fläche zeigt, dass der Winkel H um den unendlich kleinen Winkel zunimmt, den die aufeinanderfolgenden Erzeugungslinien der Kegelfläche mit einander bilden. Es wird daher einmal $\frac{1}{2}\pi$; der Curvenpunkt hat alsdann

---

* Liouville, Note sur les courbes à double courbure, a. a. O. p. 564; Bertrand, sur la courbe dont les deux courbures sont constantes. (Journ. de Mathém. T. XIII, p. 423.)

von D den Abstand c und seine Lage ist ein Scheitel der kürzesten Linie, welche die Curve auf der Kegelfläche bildet. Rechnet man den Bogen s der Curve vom Scheitel, so zeigt die Abwickelung weiter, dass $p:s = tg\,H = r:\varrho$, d. h. dass $sr:\varrho = p$ für die kürzesten Linien auf Kegelflächen charakteristisch ist.

§ 14. Krümmungshalbmesser der Normalschnitte der rectificirenden Fläche. Die Normale der rectificirenden Fläche im Punkte M einer Curve ist gemeinschaftliche Hauptnormale für alle durch M auf der Fläche unter den verschiedenen Winkeln H gegen die Erzeugungslinie geneigten kürzesten Linien derselben. Die Krümmungshalbmesser dieser sind die Krümmungshalbmesser der Normalschnitte, welche sie berühren. Für den Krümmungshalbmesser ϱ_0 des Normalschnittes senkrecht zur Erzeugungslinie oder des Normalschnittes der stärksten Krümmung ergiebt sich, da LdH sein Bogenelement und der Winkel der ganzen Krümmung dk sein Contingenzwinkel ist:

$$\varrho_0 = \frac{L\,dH}{dk}.$$

Für einen Normalschnitt, der den Winkel H mit der Erzeugungslinie bildet, ist das Bogenelement $LdH:sin H$, der Contingenzwinkel $dk\, sin\, H$, mithin sein Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{L\,dH}{sin\,H} : dk\, sin\, H = \frac{1}{sin^2 H}\cdot\frac{L\,dH}{dk}, \quad \text{mithin} \quad \varrho = \frac{\varrho_0}{sin^2 H}.$$

Insbesondere ist für den Normalschnitt, welcher durch die Binormale geführt werden kann, $\varrho = \frac{\varrho_0}{cos^2 H}$.

Da $sin\, H = \frac{R}{\varrho}$ ist, so hat man noch $\varrho_0 = \varrho\, sin^2 H = \frac{R^2}{\varrho}$.

§ 15. Einige Probleme über die Krümmung und Schmiegung der Curven. Nach Cap. II, § 2 ist die Summe der Contingenzwinkel $d\tau$ längs des Bogens MN einer Curve nach der Abwickelung der Tangentenfläche gleich der Differenz der Winkel ν und μ, welche irgend eine Gerade der Ebene mit den Tangenten in N und M bildet. Ist diese Curve die rectificirende Gratlinie, so ist $d\tau = dH$ und mithin die Summe ihrer Contingenzwinkel zwischen zwei Tangenten gleich $H - H_0$, wenn H und H_0 die Winkel dieser Tangenten mit den Tangenten irgend einer kürzesten Linie der rectificirenden Fläche sind. Rechnet man die Summe τ der Contingenzwinkel von der Tangente der rectificirenden Gratlinie an, welche H_0 entspricht, so ist $\tau = H - H_0$.

Es ist aber τ eine Function des Bogens σ der Gratlinie und sei etwa $tg(\tau + H_0) = tg\,H = f(\sigma)$. Nun ist aber $tg\,H = \frac{r}{\varrho}$ für die Curve, welche durch die Abwickelung der rectificirenden Fläche in die Gerade übergegangen ist, welche die kürzeste Linie darstellt. Daher wird $\frac{r}{\varrho} = f(\sigma)$ und kann die rectificirende Fläche zur Lösung der Aufgabe benutzt werden: diejenigen Curven zu finden, für welche das Verhältniss $\frac{r}{\varrho}$ ihres Schmiegungs- und Krümmungshalbmessers eine gegebene Function eines Parameters σ ist. Sucht man nämlich die ebene Curve, zwischen deren Bogen σ und Summe der Contingenzwinkel H die Relation besteht: $tg\,H = f(\sigma)$ und biegt sie nach irgend einem Gesetze, so dass ihre Tangenten aus der Ebene heraustreten und eine abwickelbare Fläche bilden, so ist jede kürzeste Linie dieser abwickelbaren Fläche eine Lösung der Aufgabe. Es giebt auf jeder solchen Fläche unzählige Lösungen und giebt unzählige Flächen, nach welchen die rectificirende Gratlinie gebogen werden kann.

Die Kettenlinie hat die Eigenschaft, dass die Tangente des Neigungswinkels der Berührungslinie gegen die Directrix dem Bogen σ vom Scheitel der Curve ab gerechnet proportional ist. Wickelt man daher die Ebene dieser Curve so zu einer abwickelbaren Fläche auf, dass die Curve in die Gratlinie dieser Fläche übergeht, so ist das System aller kürzesten Linien einer solchen abwickelbaren Fläche eine Schaar Curven, für welche $\frac{r}{\varrho}$ eine lineare Function eines Parameters σ ist.

Wir wollen die Aufgabe dahin erweitern, dass $\frac{r}{\varrho}$ eine Function $f(s)$ des Bogens s der Curve selbst werden soll. Man hat hierfür $ds \cdot \sin H = L \cdot dH$.

Nun soll $\frac{r}{\varrho} = tg\,H = f(s)$ werden; mithin ist $\frac{dH}{\cos^2 H} = f'(s)\,ds$ und durch Substitution von $ds = \frac{L}{\sin H} dH$

$$f'(s)\frac{L}{\sin H} = \frac{1}{\cos^2 H}, \quad \text{also} \quad L = \frac{tg\,H}{f'(s)}\sqrt{1 + tg^2 H}$$

oder

$$L = \frac{f(s)}{f'(s)}\sqrt{1 + [f(s)]^2},$$

welche Gleichung in Verbindung mit $tg\,H = f(s)$ die rectificirende Gratlinie in der Abwickelung bestimmt, sobald für L und H Anfangswerthe, entsprechend $s = 0$ gegeben sind.

. Die allgemeinste Aufgabe, welche hier gestellt werden kann, ist: die Curven zu finden, für welche zwischen dem Krümmungs- und Schmiegungshalbmesser ϱ, r eine gegebene Relation $f(\varrho, r) = 0$ besteht. Da ϱ und r jedenfalls als Functionen des Bogens der Curve gedacht werden können, so kann, weil zwischen ihnen nur eine Bedingung besteht, eine von ihnen willkürlich angenommen werden, z. B. $r = \varphi(s)$; die andere $\varrho = \psi(s)$ ergiebt sich alsdann aus dieser Relation. Man hat alsdann

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{\varphi(s)}{\psi(s)}$$

und mithin

$$tg\, H = \frac{\varphi(s)}{\psi(s)}.$$

Es kann L als Function von s bestimmt werden nach der oben entwickelten Methode. Die Gratlinie der rectificirenden Fläche kann wegen der Willkür von $\varphi(s)$ beliebig gebogen werden.*

VII. Capitel.

Die Fläche der Hauptnormalen oder Krümmungshalbmesser.

§ 1. Die Curve als asymptotische Linie der Fläche der Hauptnormalen. Die Fläche der Hauptnormalen oder Krümmungshalbmesser einer Curve *(M)* doppelter Krümmung ist nach Cap. I, § 9 windschief. Die Curve selbst ist der Durchschnitt dieser Fläche mit der rectificirenden Fläche sowohl als auch mit der Fläche der Binormalen. Sie schneidet die geraden Erzeugungslinien der Fläche rechtwinklig und ihre Schmiegungsebenen sind die Tangentenebenen der Fläche in den Durchschnittspunkten mit diesen; denn sie gehen durch die Tangenten zweier durch einen solchen Punkt auf der Fläche gezogenen Geraden, nämlich durch die Tangente der Curve und die gerade Erzeugungslinie, welche ihre eigene Tangente ist. Die Binormalen sind Normalen der Fläche in den Punkten der Curve, da sie zu diesen Tangentenebenen senkrecht sind.

---

* Eine analytische Behandlung dieser Frage wurde von Molins gegeben. Vgl. Molins, De la détermination, sous forme intégrale des équations des courbes dont le rayon de courbure et le rayon de torsion sont liés par une relation donnée quelconque. (Journ. de mathém. p. Liouville, 2me Série, T. 19. p. 425—451.)

Eine Curve auf einer Fläche, deren Schmiegungsebenen Tangentenebenen der Fläche sind, heisst eine asymptotische Linie dieser Fläche. Die Tangente einer asymptotischen Linie berührt die Fläche dreipunktig. Für die windschiefe Fläche kann die Existenz der asymptotischen Fläche auf folgende Weise leicht dargethan werden. Durch drei aufeinanderfolgende Erzeugungslinien der Fläche g, g', g'' ist ein einfaches Hyperboloid bestimmt; die drei Erzeugungslinien gehören der einen Schaar Geraden desselben an, die andere Schaar wird von sämmtlichen Geraden gebildet, welche diese drei schneiden. Durch jeden Punkt M der Erzeugungslinie g gehen daher zwei Gerade dieses Hyperboloids, nämlich g selbst als Gerade der einen und die Gerade, welche ausser g noch g' und g'' schneidet. Diese beiden Geraden haben mit der Fläche drei aufeinanderfolgende Punkte gemein, nämlich die Erzeugungslinie fällt ganz in die Fläche und die zweite Gerade trifft die Fläche in den drei Punkten, die sie mit dem Hyperboloid gemein hat. Diese Punkte seien M, M', μ''. Construirt man in M' wiederum das Hyperboloid, welchem die Erzeugungslinien g', g'' und eine weitere Erzeugungslinie g''' angehören, so giebt es durch M' eine Gerade, welche g', g'', g''' in M', M'', μ''' schneidet; ebenso in M'' eine, welche die Fläche in M'', M''', μ^{IV} trifft u. s. f. Die Punkte $M, M', M'', M''' \ldots$ bilden eine Curve, deren Tangenten die Fläche dreipunktig berühren, d. h. eine asymptotische Linie. Durch jeden Punkt M der Erzeugungslinie g geht eine asymptotische Linie. Die Tangenten dieser verschiedenen asymptotischen Linien schneiden g unter verschiedenen Winkeln. Unsere Curve bildet auf der windschiefen Fläche ihrer Hauptnormalen eine asymptotische Linie, deren Tangenten die Erzeugungslinien dieser Fläche rechtwinklig schneiden.

Die Fläche der Hauptnormalen einer Curve kann niemals eine Fläche 2ter Ordnung, d. h. ein einfaches Hyperboloid oder ein hyperbolisches Paraboloid sein. Denn für irgend eine Erzeugungslinie einer solchen Fläche ist die asymptotische Linie irgend eines ihrer Punkte die Gerade dieses Punktes, welche der Schaar angehört, in welche die Erzeugungslinie nicht gehört; sie schneidet nämlich je drei aufeinanderfolgende Erzeugungslinien. Sie ist aber keine Curve im eigentlichen Sinne.

Sind die drei aufeinanderfolgenden Erzeugungslinien g, g', g'' einer Ebene parallel, so wird das der windschiefen Fläche sich an-

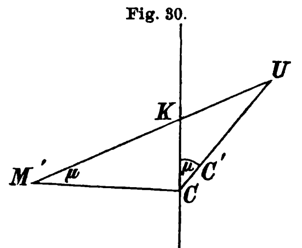
schmiegende Hyperboloid ein hyperbolisches Paraboloid. Auf den hier entwickelten Satz werden wir später zurückkommen, wenn wir die Curven gemeinschaftlicher Hauptnormalenfläche behandeln.

§ 2. Die Curve der Krümmungsmittelpunkte. Ausser der primitiven Curve liegen auf der Fläche der Hauptnormalen noch zwei besonders ausgezeichnete Curven: die Curve der Krümmungsmittelpunkte und die Strictionslinie dieser Fläche. Die Curve der Krümmungsmittelpunkte ist der Durchschnitt derselben mit der Fläche der Krümmungsaxen. Das Bogenelement CC' und also die Tangente im Punkte C dieser Curve fällt in die Normalebene der primitiven Curve (M), daher kreuzen sich die Tangenten beider Curven rechtwinklig. Die Normalebene der Curve C steht senkrecht auf der Normalebene von (M), ist also parallel der Tangente von (M). Nun ist nach Cap. V, § 3 die Tangente von (C) zugleich Tangente an einen über dem Radius MK der Schmiegungskugel als Durchmesser construirten Kreis, daher geht die Normalebene von (C) durch die Mitte des Radius der Schmiegungskugel von (M). Das Bogenelement $CC' = \overset{0}{d s}$ der Curve (C) ist leicht mit Hülfe der dortigen Betrachtungen zu finden. Es ist nämlich das Element jenes Kreises und über ihm steht als Peripheriewinkel der Schmiegungswinkel $d\sigma$, daher ist dasselbe gleich dem Producte des Radius der Schmiegungskugel und des Schmiegungswinkels, d. h. es ist

$$\overset{0}{d s} = \overset{*}{R} \cdot d\sigma = \frac{\overset{*}{R}}{r} \cdot d s.$$

Die Tangente der Curve (C) bildet mit der Krümmungsaxe denselben Winkel μ, unter welchem der Radius der Schmiegungskugel gegen die Schmiegungsebene und den Krümmungshalbmesser geneigt ist. (Cap. V, § 2.) Ist $\mu = \frac{\pi}{4}$, so läuft sie mit dem Radius der Schmiegungskugel parallel, ist $\mu \gtrless \frac{\pi}{4}$, so schneiden sich beide in einem Punkte U (Fig. 30) auf der einen oder andern Seite der Hauptnormalen und bilden mit dieser ein Dreieck $M'CU$, in welchem im einen Falle zwei Winkel gleich μ und $\frac{\pi}{2} + \mu$, im andern Falle gleich $\pi - \mu$ und $\frac{\pi}{2} - \mu$ sind, daher ist jeder Winkel $M'UC = \pm \left(\frac{\pi}{2} - 2\mu\right)$.

Fig. 30.



Mit dem Krümmungshalbmesser und der Schmiegungsebene bildet die Tangente an *(C)* den Winkel $\frac{\pi}{2} - \mu$, da sie mit ihm und der Krümmungsaxe, mit der sie den Winkel μ bildet, in derselben Ebene, der Normalebene, liegt.

§ 3. **Neigung der Tangente der Curve der Krümmungsmittelpunkte gegen die rectificirende Gerade.** Um den Neigungswinkel ξ der Tangente der Curve *(C)* gegen die rectificirende Gerade zu finden, ziehen wir durch C eine Parallele CD zu dieser (Fig. 31). Die Tangente von C, die Krümmungsaxe und diese Linie CD bilden eine dreiflächige Ecke und in dem dieser entsprechenden phärischen Dreiecke $C'KD$ ist die Seite $KD = \frac{\pi}{2} - H$, weil CD parallel der rectificirenden Geraden und die Krümmungsaxe CK parallel der Binormalen ist, $KC' = \mu$, $C'D = \xi$ und der dieser Seite gegenüberliegende Winkel $C'KD = \frac{1}{2}\pi$, weil die Ebene $C'CK$ die Normalebene und die Ebene KCD der rectificirenden Ebene parallel ist. Aus diesem Dreieck folgt

Fig. 31.

$$\cos\xi = \cos\mu \cdot \sin H = \frac{\varrho}{\overset{*}{R}} \cdot \frac{R}{\varrho} = \frac{R}{\overset{*}{R}}$$

d. h.:

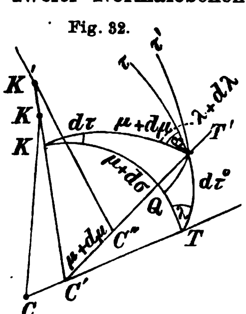
Der Cosinus der Neigung der Tangente an die Curve der Krümmungsmittelpunkte gegen die rectificirende Gerade wird durch das Verhältniss des Radius der ganzen Krümmung zum Radius der Schmiegungskugel angegeben.

Für den speciellen Fall $\mu = 0$, in welchem die Curve *(K)* der Schmiegungskugelmittelpunkte mit der Curve der Krümmungsmittelpunkte zusammenfällt, wird der Krümmungshalbmesser ϱ constant, $\left(\text{Cap. V, § 2, } h = \frac{d\varrho}{d\sigma}\right)$, der Halbmesser der Schmiegungskugel ihm gleich und die Krümmungsaxe Tangente an *(C)*. In diesem Falle werden die Winkel ξ und H complementär. Man sieht dies auch unmittelbar, wenn man bedenkt, dass die Krümmungsaxe der Binormalen parallel ist.

§ 4. **Contingenzwinkel der Curve der Krümmungsmittelpunkte. Neigung der Schmiegungsebene derselben gegen die Normalebene. Neigungen der Tangenten und Schmiegungsebenen der Curven *(C)* und *(M)* gegeneinander.**

Um den Contingenzwinkel $\overset{0}{d\tau}$ der Curve *(C)* zu finden, seien (Fig. 32) CT, $C'T'$ die beiden aufeinanderfolgenden Tangenten, die ihn bilden, CK, $C'K'$ die Krümmungsaxen, welche durch deren Berührungspunkte C, C' gehen und um C' mit der Linieneinheit eine Kugel beschrieben, auf welcher die Geraden $C'T$, $C'T'$, $C'K'$ das sphärische Dreieck $TT'K$ bestimmen. In diesem ist $TT' = \overset{0}{d\tau}$, $TK = \mu + d\sigma$, $T'K = \mu + d\mu$, $\sphericalangle\, TKT' = d\tau$, nämlich gleich dem Winkel zweier Normalebenen TCK, $T'C'K'$ der Curve *(M)*. Fällt man von T' auf die Gegenseite TK das Perpendikel $T'Q$, so wird $TQ = \pm (d\sigma - d\mu)$ und $T'Q = \sin\mu \cdot d\tau$ und folglich

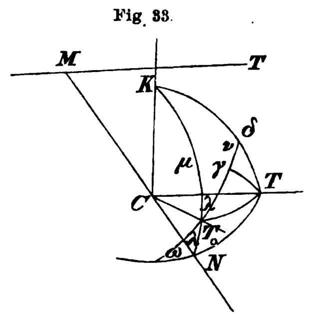
$$\overset{0}{d\tau}{}^2 = (d\sigma - d\mu)^2 + \sin^2\mu \cdot d\tau^2.$$



Für die Curven von constantem Krümmungshalbmesser ist $\mu = 0$, mithin $\overset{0}{d\tau} = d\sigma$, wie auch einleuchtet, wenn man bedenkt, dass der Contingenzwinkel der Curve *(K)*, welche in diesem Falle mit der Curve *(C)* zusammenfällt, gleich dem Schmiegungswinkel der Curve *(M)* ist. Aus dem Dreieck TQT' erhält man noch den Neigungswinkel $T'TQ = \lambda$ der Schmiegungsebene der Curve *(C)* gegen die Normalebene der Curve *(M)*, nämlich

$$tg\,\lambda = \frac{\sin\mu \cdot d\tau}{d\sigma - d\mu}, \quad \sin\lambda = \sin\mu\,\frac{d\tau}{\overset{0}{d\tau}}, \quad \cos\lambda = \frac{d\sigma - d\mu}{\overset{0}{d\tau}}.$$

Hiermit kann die Neigung der Tangente der Curve *(M)* gegen die Schmiegungsebene der Curve *(C)* erhalten werden. Construirt man nämlich im Krümmungsmittelpunkte C (Fig. 33) ausser der Hauptnormalen CN und der Krümmungsaxe CK noch eine parallele CT zur Tangente der Curve *(M)* und beschreibt um C mit der Einheit als Radius eine Kugel, so bestimmen diese drei Geraden auf ihr ein Oktantendreieck TNK, dessen Seiten TN, NK, KT die Schmiegungsebene, Normalebene und eine zur rectificirenden Ebene parallele Ebene darstellen. Die Tangente CT_0 der Curve *(C)*, welche in der Normalebene liegt, bestimmt auf NK den Punkt T_0 und der Bogen $T_0\gamma\delta$, welcher mit NK den Winkel λ bildet, repräsentirt die



Schmiegungsebene der Curve (C). Das sphärische Perpendikel $T\gamma$ stellt die Neigung der Tangente der Curve (M) gegen die Schmiegungsebene von (C) dar. In dem Dreieck $TT_0\gamma$ ist $TT_0 = \frac{1}{2}\pi$ und $\sphericalangle\, TT_0\gamma = \frac{1}{2}\pi - \lambda$ und daher

$$sin\, T\gamma = sin\, \frac{1}{2}\pi\, cos\, \lambda = cos\, \lambda \quad \text{und} \quad cos\, T\gamma = sin\, \lambda = sin\, \mu \cdot \frac{d\tau}{\overset{0}{d\tau}}.$$

Die Neigung der Tangente von (C) gegen die Schmiegungsebene TN von (M) ist $T_0N = \frac{1}{2}\pi - \mu$, also $cos\, T_0N = sin\, \mu$ und daher

$$\frac{cos\, T\gamma}{cos\, T_0 N} = \frac{d\tau}{\overset{0}{d\tau}},$$

d. h.:

Die Curve (M) und die Curve (C) ihrer Krümmungsmittelpunkte sind zwei Curven der Art, dass die Cosinusse der Neigung der Tangente jeder von ihnen gegen die Schmiegungsebene der anderen in demselben Verhältniss stehen, wie ihre Contingenzwinkel.*

Auch sieht man aus dem rechtwinkligen Dreieck $T_0K\delta$, dass der Neigungswinkel ν der Schmiegungsebene der Curve (C) gegen die rectificirende Ebene gefunden wird durch $cos\, \nu = sin\, \lambda\, cos\, \mu$; sowie dass für die Neigung ω der Schmiegungsebenen beider Curven (M) und (C) gegen einander die Relation gilt:

$$cos\, \omega = sin\, \lambda\, sin\, \mu = cos\, T\gamma \cdot cos\, T_0 N,$$

d. h.:

Der Cosinus der Neigung der Schmiegungsebene beider Curven (M) und (C) ist das Product der Cosinusse der Neigungen der Tangente je einer von ihnen gegen die Schmiegungsebene der andern.

§ 5. Der Schmiegungswinkel $\overset{0}{d\sigma}$ der Curve C ergiebt sich aus dem Winkel λ mit Hülfe von Betrachtungen, wie in Cap. III, § 5. Es ist nämlich

$$\overset{0}{d\sigma} = \pm\, d\lambda + cos\, \mu \cdot d\tau.$$

Zum Beweise dieser Behauptung wollen wir einen Satz entwickeln über den Aussenwinkel eines sphärischen Dreiecks, in welchem

---

* Molins hat diesen und den folgenden Satz analytisch bewiesen in seiner Abhandlung: Sur quelques nouvelles propriétés de lieu des centres de courbure des courbes gauches. (Mém. de l'Académie des sciences etc. de Toulouse, 8ième Série, T. X, p. 400—409.) (1888.)

ein innerer Winkel und seine Gegenseite unendlich klein sind. Bedeutet Δ den Inhalt des sphärischen Dreiecks ABC (Fig. 34) und A' den Nebenwinkel von A, so ist

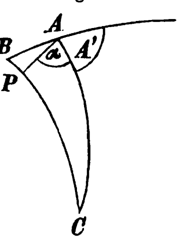


Fig. 34.

$$A + B + C = 2(\pi + \Delta), \quad A + A' = \pi,$$

mithin
$$A' = B + C - (2\Delta + \pi).$$

Fällt man nun von der Ecke A auf die gegenüberliegende Seite BC das Perpendikel AP, so ist für den Fall, dass der Winkel C und seine Gegenseite $c = AB$ unendlich klein werden, das Dreieck ABP selbst unendlich klein und sein Inhalt wegen

$$\sin AP = \sin c \cdot \sin B \quad \text{und} \quad tg\, BP = tg\, c \cdot \cos B$$

von der Ordnung c^2 und kann mithin der Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks $APC = \Delta'$ den Inhalt des Dreiecks $ABC = \Delta$ vertreten. Nun ist aber für Δ', wenn Winkel $PAC = \alpha$ gesetzt wird,

$$\alpha + \frac{1}{2}\pi + C = 2(\pi + \Delta')$$

und folglich, indem man hieraus den Werth von $2\Delta'$ in die obige Gleichung für 2Δ einsetzt,

$$A' = B + \left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right).$$

Wir hätten bereits Cap. III, § 5 diesen Satz in Anwendung bringen können; es war jedoch nicht nothwendig, da dort unmittelbar sich ergab, dass der Winkel $ST'Q$, der dort die Bedeutung des hier gebrauchten α hat, gleich $\frac{1}{2}\pi$ ist, weil Bogen $ST' = \frac{1}{2}\pi$ war.

In Bezug auf den Schmiegungswinkel $\overset{0}{d\sigma}$ hat man nun (Fig. 32), wenn $T\tau$, $T'\tau'$ die beiden aufeinanderfolgenden Schmiegungsebenen der Curve (C) bezeichnen und β der Aussenwinkel des Dreiecks KTT' ist,

$$\overset{0}{d\sigma} = \pm [\beta - (\lambda + d\lambda)] \quad \text{und} \quad \beta = \lambda + \left(\frac{1}{2}\pi - KT'Q\right),$$

mithin
$$\overset{0}{d\sigma} = \pm\, d\lambda + \left(\frac{1}{2}\pi - KT'Q\right).$$

Daher wird

$$\begin{cases} \sin(\overset{0}{d\sigma} \mp d\lambda) = \cos KT'Q = cotg\,(\mu + d\mu) \cdot tg\, T'Q \\ \qquad = cotg\, \mu \cdot T'Q = cotg\, \mu \cdot \sin\mu \cdot d\tau = \cos\mu \cdot d\tau \end{cases}$$

und mithin

$$\overset{0}{d\sigma} = \pm\, d\lambda + \cos\mu \cdot d\tau,$$

worin

$$d\lambda = \pm \frac{d\left(\frac{\sin\mu \cdot d\tau}{d\sigma - d\mu}\right)}{1 + \left(\frac{\sin\mu \cdot d\tau}{d\sigma - d\mu}\right)^2}$$

zu setzen ist (§ 4).

§ 6. Krümmungen der Curve C. Mit Hülfe der Werthe für $\overset{0}{ds}$, $\overset{0}{d\tau}$, $\overset{0}{d\sigma}$ können die Fragen über die Krümmung der Curve (C) erledigt werden. Insbesondere ist der Krümmungshalbmesser

$$\overset{0}{\varrho} = \frac{\overset{0}{ds}}{\overset{0}{d\tau}} = \frac{\overset{*}{R} \cdot d\sigma}{\sqrt{(d\sigma - d\mu)^2 + \sin^2\mu \cdot d\tau^2}}.$$

Um diesen Ausdruck zu interpretiren, schreiben wir ihn um, nämlich so:

$$\left(\frac{1}{\varrho_0}\right)^2 = \left(\frac{d\sigma - d\mu}{\overset{0}{ds}}\right)^2 + \left(\frac{\sin\mu \cdot d\tau}{\overset{0}{ds}}\right)^2.$$

Aus Fig. 32 ist ersichtlich, dass die Curve (C) durch Abwickelung der Fläche der Krümmungsaxen in eine ebene Curve übergeht von demselben Bogenelement $\overset{0}{ds}$, wie die Curve (C), aber einem Contingenzwinkel gleich $d\sigma - d\mu$. Ist daher ϱ' deren Krümmungshalbmesser, so stellt $\frac{1}{\varrho'} = \frac{d\sigma - d\mu}{\overset{0}{ds}}$ die Krümmung der abgewickelten Curve (C) dar. Legt man ferner durch die Tangente der Curve (C) den Normalschnitt der Fläche der Krümmungsaxen, so hat auch dieser das Bogenelement $\overset{0}{ds}$, aber sein Contingenzwinkel wird, wie aus derselben Figur erhellt, gleich $\sin\mu \cdot d\tau$. Ist also ϱ'' sein Krümmungshalbmesser, so ist

$$\frac{1}{\varrho''} = \frac{\sin\mu \cdot d\tau}{\overset{0}{ds}}$$

seine Krümmung. Daher lautet die gedachte Interpretation so:

Das Quadrat der Krümmung der Curve (C) der Krümmungsmittelpunkte ist die Quadratsumme der Krümmungen der mit der Fläche der Krümmungsaxen abgewickelten Curve (C) und der Krümmung des Normalschnitts der Fläche der Krümmungen, welcher durch die Tangente der Curve (C) geführt werden kann.

In dem Falle, dass die Curve constanten Krümmungshalbmesser besitzt, also für $\mu = 0$ wird $\overset{0}{\varrho} = \overset{*}{R} = \varrho$. In diesem Falle haben die Curve (M) und die Curve ihrer Krümmungsmittelpunkte gleiche

Krümmungshalbmesser und besitzen überhaupt sehr interessante Beziehungen, die wir im folgenden Capitel entwickeln wollen.

§ 7. Umkehrung des Problems der Curve der Krümmungsmittelpunkte oder der Hauptnormalen. Zu jeder Curve (M) gehört eine bestimmte Fläche der Hauptnormalen und auf ihr eine bestimmte Curve (C) der Krümmungsmittelpunkte, welche der Durchschnitt der Fläche der Krümmungsaxen mit dieser Fläche ist. Umgekehrt gehören zu jeder Curve (C) als Ort der Krümmungsmittelpunkte unzählig viele Curven (M) und Flächen ihrer Hauptnormalen. Um zu einer Curve (C) irgend eine der Curven (M) zu finden, für welche sie Ort der Krümmungsmittelpunkte ist, sei $C, C', C'', \ldots$ die continuirliche Folge ihrer Punkte und ziehen wir in diesen die Tangenten $CT, C'T', C''T'', \ldots$, welche die Richtung der Bogenelemente $CC', C'C'', C''C''' \ldots$ sind. Durch diese Tangenten legen wir eine continuirliche Folge von Ebenen $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ Dieselben bilden eine abwickelbare Fläche F, schneiden sich paarweise aufeinanderfolgend in Geraden $k, k', k'', \ldots$ und sind die Schmiegungsebenen einer Curve (K), welche von diesen Geraden in Punkten $K, K', K'' \ldots$ berührt wird. In jeder dieser Ebenen ε ziehen wir durch den Punkt C zu der durch ihn hindurchgehenden Geraden k die Normale n und legen durch die Punkte C, C', K einen Kreis, welcher die Normale n ausser in C noch in einem Punkte M schneiden wird. Dieser Kreis berührt die Curve (C) in C und ist CM ein Durchmesser desselben, welcher mit n denselben Winkel μ bildet, den das Bogenelement CC' mit k umschliesst. Die Folge der Punkte M bildet eine Curve (M), deren Krümmungsmittelpunkte die Punkte C, deren Normalebene die Ebene ε, deren Hauptnormalen die Geraden n, deren Krümmungsaxen die Geraden k und deren Schmiegungskugelmittelpunkte die Punkte K sind.

Zum Beweise wickeln wir die Fläche F mit der Ebene ε ab, d. h. wir lassen ε berührend über F hingleiten, sodass sie successive um die Geraden k rotirt und dadurch zum Zusammenfallen mit $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ gelangt. Bei diesem Process der Abwickelung bildet sich die Fläche F auf ε ab (s. Cap. IV, § 10). Die Curve (C) geht in eine ebene Curve (γ), die Curve (K) in eine zweite ebene Curve (k) über. Die Normalen n werden zu Strahlen ν eines Punktes μ, welcher die Abbildung vom Punkte M ist und die Geraden k bilden sich als die Tangenten k der Curve (γ) ab und stehen senkrecht

auf der Geraden ν. Der Punkt μ wird daher der Pol, in Bezug auf welchen die Curve (γ) die Fusspunktcurve von (k) ist. Während die Ebene ε durch die Rotation um k in die Lage ε' gelangt, beschreibt der Punkt μ ein Bogenelement MM' der Curve (M) als Element eines Kreises, dessen Mittelpunkt C ist und dessen Ebene senkrecht auf k steht. Dies Element steht senkrecht auf ε und ist also ε seine Normalebene in M. Rotirt hierauf die Ebene ε um die folgende Gerade k', so beschreibt μ ein zweites Bogenelement $M'M''$, welches auf ε' senkrecht steht und als Element eines um C' beschriebenen Kreises anzusehen ist, dessen Ebene zu k' senkrecht ist. Da beide Ebenen ε, ε' durch k hindurchgehen, so stehen sie beide auf der Ebene MCM' senkrecht und fällt das Element $M'M''$ in diese Ebene hinein und kann, da es senkrecht zu $M'C$ ist, als zweites Element des um C beschriebenen Kreises angesehen werden, welcher die drei Punkte M, M', M'' mit der Curve (M) gemein hat und mithin der Krümmungskreis dieser Curve in M ist. Sein Mittelpunkt C ist daher der Krümmungsmittelpunkt in M. Dieselbe Construction wiederholt sich in allen Lagen der beweglichen Ebene ε und erkennt man, dass die Curve (C) in der That die Curve der Krümmungsmittelpunkte der Curve (M) ist.

Die Bogenelemente MM', $M'M''$ stehen auf den Ebenen ε, ε' senkrecht und bilden daher denselben Winkel mit einander, wie diese Ebenen. Daher ist der Contingenzwinkel der Curve (M) gleich dem Schmiegungswinkel der Curve (K). Die Geraden $M'C$, $M'C'$ stehen senkrecht auf k, k' und bilden also denselben Winkel, wie diese. Sie stehen aber auch senkrecht auf dem Elemente $M'M''$, in welchem sich die Ebenen der Krümmungskreise schneiden, deren Mittelpunkte C, C' sind. Sie bilden daher den Schmiegungswinkel der Curve (M) und dieser ist daher gleich dem Contingenzwinkel (kk') der Curve (K). Die Curve (M) und die Curve (K) haben daher die Contingenz- und die Schmiegungswinkel verwechselt gleich und sind die Tangenten von (K) die Durchschnittslinien der Normalebenen von (C). Daher ist die Fläche F die Fläche der Krümmungsaxen von (M). Daher ist die Curve (K) der Ort der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln von (M). Die Curve (M) ist aber die einzige Curve auf der Fläche der Geraden n, welche ihre Hauptnormalen und deren Schmiegungskugelmittelpunkte die Punkte K sind. Denn nur für sie bilden die Radien KM mit den Schmiegungs-

ebenen dieselben Winkel μ, welche die Krümmungsaxen k mit den Elementen der Curve (C) bilden.

Sobald die abwickelbare Fläche F, welche durch die Curve (C) geht, bestimmt ist, ist auch die Curve (M) bestimmt, deren Krümmungsmittelpunkte die Punkte von (C) sind. Da sie beliebig gewählt werden kann, so hat das Problem, zu einer Curve (C) eine Curve (M) zu finden, deren Krümmungsmittelpunktscurve (C) ist, unendlich viele Lösungen. Unter den Flächen F giebt es ausgezeichnete. So z. B. ist eine solche die rectificirende Fläche von (C). Für sie wird die ebene Curve (γ), in welche (C) durch die Abwickelung übergeht, eine Gerade und die ebene Curve (k), deren Fusspunktcurve (γ) für den Punkt μ der Pol wird, eine Parabel mit μ als Brennpunkt und (γ) als zugehöriger Directrix.

Verbiegt man daher ein Parabel so, dass ihre Tangenten eine abwickelbare Fläche bilden, so beschreibt ihr Brennpunkt eine Curve, deren Krümmungsmittelpunkte auf der geodätischen Linie dieser Fläche liegen, in welche die Directrix der Parabel hierbei übergeht.

Andere Specialfälle ergeben sich, wenn für F eine Kegelfläche, oder Cylinderfläche, oder eine Fläche gewählt wird, welche mit den Schmiegungsebenen von (C) constanten Winkel bildet.*

§ 8. Die Strictionslinie der Fläche der Hauptnormalen. Auf der Fläche der Hauptnormalen liegt ausser der primitiven Curve (M) und der Curve ihrer Krümmungsmittelpunkte noch eine dritte ausgezeichnete Curve, die Strictionslinie (E) dieser Fläche. Da nämlich zwei aufeinanderfolgende Hauptnormalen sich nicht schneiden, so giebt es auf ihnen zwei Punkte E, e kürzesten Abstandes; ebenso liegen auf der zweiten von ihnen und einer folgenden dritten zwei analoge Punkte E', e', desgleichen auf der dritten und vierten die Punkte E'', e'' von derselben Bedeutung u. s. f. Die Folge der Punkte $E, E', E'', \ldots$, nämlich der Punkte kürzesten Abstandes jeder Hauptnormalen von der folgenden fällt in der Grenze mit der Folge der Punkte $e, e', e'' \ldots$, nämlich der Punkte kürzesten Abstandes jeder Hauptnormalen von der vorhergehenden zusammen. Sie bildet eine Curve, welche die Strictionslinie der

---

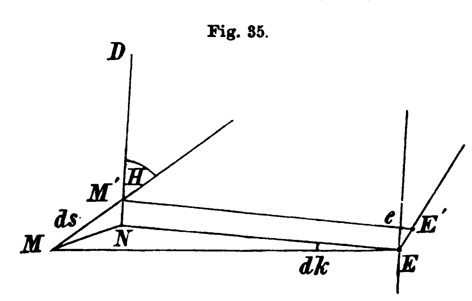
* Pirondini, sul problema di trovare la curva di cui è noto il luogo de' sui centri di curvatura. (Annali di matem. pura ed appl. Ser. II, T. XVII, p. 65—79.) (1889.)

Fläche genannt wird. Jede windschiefe Fläche hat eine Strictionslinie; sie hat für diese Flächen ungefähr die Bedeutung, welche die Gratlinie für die abwickelbaren Flächen hat. Sie bildet im Allgemeinen einen veränderlichen Winkel mit den Erzeugungslinien. Ist der Winkel constant und ein rechter, so hat die Fläche eine „orthogonale Striction", ist der Winkel Null, so fällt das Element der Strictionslinie und mit ihm seine Tangente in die Erzeugungslinie, die Erzeugungslinien sind also Tangenten an die Strictionslinie und die Fläche geht über in eine abwickelbare Fläche. Man kann also jede abwickelbare Fläche als eine windschiefe ansehen mit verschwindendem Strictionswinkel.

Die kürzeste Linie zwischen zwei sich im Raume kreuzenden Geraden ist senkrecht zu beiden, nämlich senkrecht zur Ebene, welche beiden parallel läuft. Nun ist die rectificirende Gerade senkrecht zu zweien aufeinanderfolgenden Hauptnormalen oder senkrecht zur Ebene der ganzen Krümmung, daher ist der kürzeste Abstand zweier Hauptnormalen parallel der rectificirenden Geraden und senkrecht zur Ebene der ganzen Krümmung.

Sind E, e (Fig. 35) die Punkte kürzesten Abstandes der Hauptnormalen in den Punkten M, M', ist $M'D$ die rectificirende Gerade und durch ME die Ebene ganzer Krümmung parallel zu $M'E'$ geführt, welche die rectificirende Gerade in N rechtwinklig schneidet, so wird EN parallel $M'E'$ und der Winkel $MEN = dk$, d. h. gleich dem Winkel der ganzen Krümmung. Man erhält daher für den kürzesten Abstand Ee der beiden Hauptnormalen, den wir $d\alpha$ nennen wollen: $Ee = M'N = MM' \cdot \cos H$, d. h.

Fig. 35.



$$d\alpha = ds \cos H = \frac{R}{r} ds = R d\sigma = \frac{R\varrho}{r} d\tau = \frac{R^2}{r} dk$$

und für die Entfernung EM des Punktes E der Strictionslinie von der primitiven Curve M, die mit u bezeichnet werden möge, aus der Gleichung $MN = ds \sin H = EM \cdot dk$ (es steht nämlich die Ebene DNE senkrecht auf der rectificirenden Ebene, daher ist $\sphericalangle MNE = \frac{1}{2}\pi$)

$$u = \frac{ds}{dk} \cdot \sin H = \frac{ds\, d\tau}{dk^2} = R \sin H = \varrho \sin^2 H = \frac{R^2}{\varrho},\ R^2 = u\varrho,$$

d. h.:

Der Radius der ganzen Krümmung ist das geometrische Mittel zwischen dem Krümmungshalbmesser und dem Abstand der Strictionslinie auf der Fläche der Hauptnormalen von der primitiven Curve.

Hieraus folgt, dass u niemals grösser als R sein kann, und da R niemals grösser als ϱ ist, dass der Abstand der Strictionslinien nie grösser als der Krümmungshalbmesser sein kann. Nun kreuzt die Tangente der Curve (C) der Krümmungsmittelpunkte die Tangente der Curve (M) rechtwinklig, projicirt man daher diese Tangente und die Linie Ee kürzesten Abstandes auf die rectificirende Ebene, so fallen die Projectionen mit der Binormalen und rectificirenden Geraden zusammen und es geht die Projection von Ee zwischen der Tangente von (M) und der Projection der Tangente von (C) hindurch. Hieraus folgt, dass die Projectionen der Punkte M' und C' auf irgend eine durch den Krümmungshalbmesser ME gehende Ebene auf entgegengesetzten Seiten von ME fallen, dass mithin E, die Projection von e auf die Ebene der ganzen Krümmung zwischen M und C liegen muss, d. h.:

Die Punkte E kürzesten Abstandes auf den Krümmungshalbmessern liegen zwischen den Punkten der Curve (M) und den Krümmungsmittelpunkten C. Die Strictionslinie liegt daher auf der Fläche der Krümmungshalbmesser immer in dem Raume zwischen den Curven (M) und (C).

Der Punkt E theilt den Krümmungshalbmesser $MC = \varrho$ in einem leicht zu ermittelnden Verhältniss. Es ist nämlich

$$EM = u = \varrho \sin^2 H$$

und

$$EC = \varrho - u = \varrho - \varrho \sin^2 H = \varrho \cos^2 H,$$

mithin

$$\frac{EM}{EC} = tg^2 H = \frac{r^2}{\varrho^2},$$

d. h.:

Das Verhältniss der Entfernungen der Punkte kürzesten Abstandes von den Punkten der Curven (M) und (C) ist gleich dem quadratischen Verhältniss des Schmiegungsradius und Krümmungsradius.

Wir fanden (§ 8)

$$d\alpha = R d\sigma = \frac{R\varrho}{r} d\tau = \frac{R^2}{r} dk.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} = R = \frac{ds}{dk}$$

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{R\varrho}{r}$$

$$\frac{d\alpha}{dk} = \frac{R^2}{r}.$$

Diese Linien, sowie die Länge $u = \frac{R^2}{\varrho}$ lassen sich sämmtlich in dem Cap. II, § 12 construirten Dreieck darstellen.

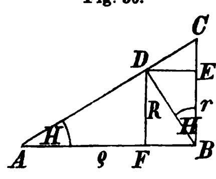


Fig. 36.

Ist nämlich (Fig. 36) $AB = \varrho$, $BC = r$, so wird $BD = R = \frac{d\alpha}{d\sigma}$, $AD = \frac{R\varrho}{r} = \frac{d\alpha}{d\tau}$, $DE = \frac{R^2}{\varrho} = u$ und $DF = \frac{R^2}{r} = \frac{d\alpha}{dk}$.

Legt man durch die Linie Ee (Fig. 37) des kürzesten Abstandes zweier Hauptnormalen eine Ebene senkrecht zur ersten Hauptnormale, so steht sie senkrecht auf der Schmiegungsebene und schneidet sie in einer Geraden EV, welche parallel der Tangente in M läuft. Eine Parallele $M'V$ zur ersten Hauptnormalen MC wird von ihr in einem Punkte V und die Projection $M'C$ der zweiten Hauptnormalen auf die erste Schmiegungsebene in einem Punkte Q getroffen, sodass eQ senkrecht zur Schmiegungsebene ist.

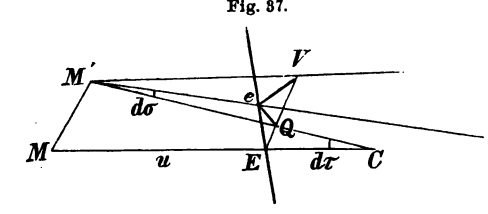


Fig. 37.

Da die Ebene $VM'e$ die Richtung der Ebene der ganzen Krümmung hat, so steht Ee senkrecht auf ihr und das Dreieck EeV ist also bei e rechtwinklig, und Winkel $eEQ = H$. Nun hat man

$$eQ = M'e \cdot d\sigma = M'Q \cdot d\sigma = ME \cdot d\sigma = u d\sigma$$

$$QV = M'Q \cdot d\tau = u d\tau$$

mithin

$$\frac{QV}{eQ} = \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{r}{\varrho}.$$

Ferner ist

$$eQ^2 = EQ \cdot QV$$

und

$$eQ = M'Q \cdot d\sigma = EM \cdot d\sigma$$

$$EQ = EC \cdot d\tau$$

$$QV = EM \cdot d\tau$$

mithin

$$\overline{EM}^2 \cdot d\sigma^2 = EC \cdot EM \cdot d\tau^2$$

oder

$$\frac{EM}{EC} = \left(\frac{d\tau}{d\sigma}\right)^2 = \frac{r^2}{\varrho^2},$$

wie wir oben fanden.

§ 9. Ort der Mittelpunkte stärkster Krümmung der rectificirenden Fläche. Die Ebene der ganzen Krümmung schneidet die Schmiegungsebene im Krümmungshalbmesser und bildet mit ihr den Winkel $\frac{\pi}{2} - H$, nämlich denselben Winkel, welchen die auf diesen beiden Ebenen senkrechten Geraden, die rectificirende Gerade und die Binormale miteinander bilden.

Da die Ebene der ganzen Krümmung senkrecht zur rectificirenden Geraden ist, so schneidet sie die rectificirende Fläche in einem Hauptnormalschnitt stärkster Krümmung, dessen Element MN (Fig. 35) ist. Da ME Normale der rectificirenden Fläche und in dem Dreieck MEN die Linien ME und NE gleich sind, so ist E der Krümmungsmittelpunkt und $ME = u$ der Krümmungshalbmesser dieses Schnitts, d. h.:

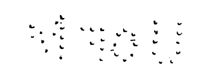
Die Strictionslinie ist der Ort der Mittelpunkte stärkster Krümmung für die rectificirende Fläche in den Punkten der Curve M.

Die Ebene, welche durch die Linie kürzesten Abstandes und die rectificirende Gerade geht, ist senkrecht zur rectificirenden Ebene, weil sie die Hauptnormale enthält. Nun ist die rectificirende Ebene Schmiegungsebene der rectificirenden Gratlinie; daher ist jene Ebene die rectificirende Ebene der rectificirenden Gratlinie. Sie ist die Tangentenebene der Fläche der Hauptnormalen im Fusspunkte E des kürzesten Abstandes Ee dieser Hauptnormalen von der folgenden Hauptnormalen. Der Punkt E ist der Centralpunkt und sie die Centralebene der Hauptnormalen. Als Tangentenebene in E enthält sie die Richtung EE' der Tangente der Strictionslinie. Die folgende rectificirende Ebene der rectificirenden Gratlinie geht durch den



kürzesten Abstand $E'e'$ der folgenden Hauptnormale von der dritten Hauptnormale und durch die zweite rectificirende Gerade der Curve (M). Die Schnittlinie beider rectificirenden Ebenen der rectificirenden Gratlinie geht daher durch den Schnittpunkt D der beiden rectificirenden Geraden von M und durch den Punkt E'. Da dieser aber mit E zusammenfällt, so folgt, dass die rectificirende Gerade der rectificirenden Gratlinie der Curve (M) die Punkte D und E, nämlich den Punkt D der rectificirenden Gratlinie und den Centralpunkt der Hauptnormalen verbindet. Diese Gerade erzeugt eine abwickelbare Fläche, welche von den rectificirenden Ebenen der rectificirenden Gratlinie von M längs ihr berührt wird. Diese Fläche ist die rectificirende Fläche der rectificirenden Gratlinie und enthält also nach Cap. VI, § 7 die Mittelpunkte stärkster Krümmung der rectificirenden Fläche. Nennt man den Ort der Mittelpunkte stärkster oder schwächster Krümmung einer Fläche eine Evolutenfläche jener, so ist die vorliegende Fläche die zweite Evolutenfläche von der Tangentenfläche der Curve (M).

Die Ebene der ganzen Krümmung erzeugt ebenfalls eine abwickelbare Fläche. Sie ist die Asymptotenfläche der Fläche der Krümmungshalbmesser. Eine Ebene nämlich, welche durch die Erzeugungslinie einer windschiefen Fläche und ihren kürzesten Abstand von der nächsten Erzeugungslinie gelegt wird, ist die Tangentenebene der Fläche in dem Durchschnittspunkt des kürzesten Abstandes mit der ersten Erzeugungslinie. Lässt man nun diese Ebene sich um die Erzeugungslinie drehen, so bleibt sie immer Tangentenebene der Fläche, nämlich in dem Punkte der Erzeugungslinie, in welchem diese von einem Perpendikel getroffen wird, welches in ihrem Durchschnittspunkt mit der folgenden Erzeugungslinie auf die Erzeugungslinie gefällt werden kann. Wird die Ebene senkrecht zum kürzesten Abstand, also parallel der folgenden Erzeugungslinie, so schneidet sie diese im unendlich fernen Punkte und ihr Berührungspunkt rückt gleichfalls ins Unendliche; sie wird also eine Asymptotenebene der Fläche. Daher sind die Ebenen der ganzen Krümmung die Asymptotenebenen der Fläche der Krümmungshalbmesser. Da die Asymptotenebene durch den unendlich fernen Punkt der folgenden Erzeugungslinie und die folgende Asymptotenebene durch diese Erzeugungslinie selbst, also auch durch deren fernen Punkt geht, so liegt dieser in beiden, d. h. die Erzeugungslinie der abwickelbaren



Fläche der Ebenen der ganzen Krümmung ist parallel dem Krümmungshalbmesser. Daher ist die Fläche selbst asymptotisch zu dieser. Cap. VI, § 10 ergab sich bereits, dass die Erzeugungslinie dieser Asymptotenfläche der Fläche der Hauptnormalen durch einen bestimmten Punkt Q eines Kreises geht, welcher in der rectificirenden Ebene gelegen, die primitive Curve in M berührt und durch den entsprechenden Punkt D der rectificirenden Gratlinie hindurchgeht.

§ 10. Bogenelement der Strictionslinie. Das Bogenelement $EE' = \bar{ds}$ der Strictionslinie folgt aus dem Dreieck EeE', in welchem $Ee = d\alpha$ und $eE' = M'E' - M'e = M'E' - ME = du$, nämlich

$$\bar{ds}^2 = d\alpha^2 + du^2$$

oder weil

$$d\alpha = ds \cos H = \frac{R}{r} ds = R d\sigma = \frac{R\varrho}{r} d\tau = \frac{R^2}{r} dk$$

und

$$u = \frac{ds}{dk} \sin H = R \sin H = \varrho \sin^2 H = \frac{R^2}{\varrho}$$

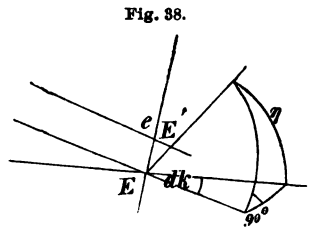
$$\overline{ds}^2 = (ds \cos H)^2 + (d \cdot \varrho \sin^2 H)^2 = R^2 d\sigma^2 + \left(d \cdot \frac{R^2}{\varrho}\right)^2.$$

Hat die Curve insbesondere gleichzeitig constanten Krümmungs- und Schmiegungsradius, ist sie also nach Cap. VI, § 13 (VIII) eine Helix auf einem Kreiscylinder, so ist $du = 0$, mithin $\overline{ds} = d\alpha = R d\sigma$ und es fällt dann das Element der Curve E in die Linie kürzesten Abstandes, und da in diesem Falle die rectificirende Fläche der Cylinder ist, so fallen alle Linien kürzesten Abstandes zusammen und die Curve (E) ist eine Gerade, und zwar findet das letztere ausschliesslich in diesem Falle statt. Allgemein ist $du = 0$, wenn $\frac{R^2}{\varrho}$ constant ist. Daher schneidet die Strictionslinie der Fläche der Hauptnormalen blos dann die Hauptnormalen rechtwinklig, wenn das Quadrat des Radius der ganzen Krümmung proportional dem Krümmungshalbmesser ist.

§ 11. Wir suchen jetzt den Neigungswinkel der Tangente der Strictionslinie gegen den Krümmungshalbmesser, gegen die rectificirende Gerade, gegen die Tangente und Binormale der Curve (M). Sie seien der Reihe nach η, ϑ, φ, χ. Da die Tangente von E in die Ebene fällt, welche durch den Krümmungshalbmesser und die rectificirende Gerade geht und diese Ebene senkrecht steht auf der Ebene der ganzen Krümmung, so

ist eine aus der Tangente EE', dem Krümmungshalbmesser ME und der Projection NE des folgenden Krümmungshalbmessers auf die Ebene der ganzen Krümmung gebildete Ecke (Fig. 38) rechtwinklig und daher

Fig. 38.

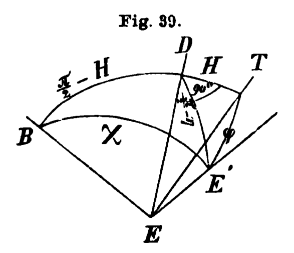


$$tg\,\eta = \frac{Ee}{eE'} = \frac{d\alpha}{du} = \frac{ds\cos H}{d(\varrho\sin^2 H)}.$$

Daher ist η zugleich die Neigung der Tangente von E gegen die Ebene der ganzen Krümmung. Die Neigung ϑ gegen die rectificirende Gerade ist

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \eta.$$

Fig. 39.



Um die Winkel φ und χ zu finden, ziehen wir durch E Linien ET, EB (Fig. 39) parallel der Tangente und Binormale (oder Krümmungsaxe) von M und erhalten sofort

$$\cos\varphi = \cos H \cdot \sin\eta, \quad \cos\chi = \sin H \cdot \sin\eta.$$

VIII. Capitel.

Die Curven constanten Krümmungshalbmessers und die Curven gemeinschaftlicher Hauptnormalen.

§ 1. Die Curven constanten Krümmungshalbmessers und die Curven (C) und (K) ihrer Krümmungsmittelpunkte und Mittelpunkte der Schmiegungskugeln. Für jede Curve doppelter Krümmung (M) ist (Cap. V, § 4) die Schmiegungsebene, Normalebene und rectificirende Ebene eines Punktes M parallel der Normalebene, Schmiegungsebene und rectificirenden Ebene der Curve (K) der Schmiegungskugelmittelpunkte in dem entsprechenden Punkte K und fallen insbesondere die Normalebene von M und die Schmiegungsebene von K zusammen. Daher sind auch die Tangente, Hauptnormale, Binormale und rectificirende Gerade von M parallel der Binormalen, Hauptnormalen, Tangente und rectificirenden Geraden von K und ebenso die Flächen der Tangenten, Haupt-

normalen, Binormalen und die rectificirende Fläche von (M) parallel den Flächen der Binormalen, Hauptnormalen, Tangenten und der rectificirenden Fläche von (K). In die Normalebene von M fallen die Hauptnormale von (M), die Tangente der Curve (C) der Krümmungsmittelpunkte von (M), die Tangente von (K) und der Radius MK der Schmiegungskugel; es ist der Winkel μ, welchen MK mit MC bildet gleich dem Winkel der Tangenten von (C) und (K) und ist der Abstand $CK = h = \varrho \, tg \, \mu = \frac{d\varrho}{d\sigma}$. Für die Curven constanten Krümmungshalbmessers wird $d\varrho = QC'$ (Fig. 23), h und $tg \, \mu$ gleich Null und folgt:

Für die Curven (M) constanten Krümmungshalbmessers fällt die Curve (K) der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln mit der Curve (C) der Krümmungsmittelpunkte zusammen und schneidet (C) die Hauptnormalen von (M) rechtwinklig.

Die Curven constanten Krümmungshalbmessers haben mit der Curve ihrer Krümmungsmittelpunkte gemeinschaftliche Hauptnormalen in den entsprechenden Punkten M und C.

Die Schmiegungsebene jeder dieser Curven ist die Normalebene der andern; jede derselben ist die Curve der Krümmungsmittelpunkte der andern und ebenso ist die Tangente der einen die Krümmungsaxe der andern und ist die Fläche der Evolventen der einen die Fläche der Evoluten der andern.

§ 2. Das constante Product der Schmiegungshalbmesser. Die rectificirenden Geraden beider Curven (M) und (C) sind parallel und die Tangente der einen ist parallel der Binormalen der andern, daher sind die Winkel H und H_c, welche ihre rectificirenden Geraden mit den Tangenten bilden, complementär, $H + H_c = \frac{1}{2}\pi$ und $tg\, H \cdot tg\, H_c = 1$. Sind daher ϱ und ϱ_c, r und r_c resp. ihre Krümmungs- und Schmiegungshalbmesser, sodass $tg\, H = r : \varrho$, $tg\, H_c = r_c \cdot \varrho_c$, so wird $rr_c : \varrho\varrho_c = rr_c : \varrho^2 = 1$, d. h.:

Das Product der Schmiegungshalbmesser beider Curven (M) und (C) ist constant, nämlich gleich dem Quadrate des constanten Krümmungshalbmessers.

§ 3. **Relationen zwischen den Radien R, ϱ und R_c, r_c.** Da beide Curven gemeinschaftliche Hauptnormalen besitzen, so ist der Winkel der ganzen Krümmung für beide derselbe. Contingenz- und Schmiegungswinkel haben sie aber reciprok gemein, d. h. es ist

$$dk = dk_c, \quad d\tau = d\sigma_c, \quad d\sigma = d\tau_c,$$

und da

$$\varrho = ds : d\tau = \varrho_c = ds_c : d\tau_c$$

ist, so folgt

$$ds : ds_c = d\tau : d\tau_c = d\tau : d\sigma = r : \varrho$$

und

$$R : R_c = \frac{ds}{dk} : \frac{ds_c}{dk_c} = ds : ds_c = r : \varrho,$$

d. h.

$$R\varrho = R_c \cdot r$$

oder wegen

$$r r_c = \varrho^2$$

auch

$$R \cdot r_c = R_c \cdot \varrho.$$

§ 4. **Relationen zwischen den rectificirenden Gratlinien einer Curve constanten Krümmungshalbmessers und ihrer Curve (C).** Für die Abstände L, L_c der entsprechenden Punkte der Gratlinie der rectificirenden Flächen von (M) und (C) ergiebt sich:

$$L = \frac{ds}{dH} \cdot \sin H, \quad L_c = \frac{ds_c}{dH_c} \cdot \sin H_c,$$

mithin

$$L : L_c = -\frac{ds}{ds_c} \cdot tg\, H = -tg^2 H = -\frac{r^2}{\varrho^2}.$$

Ebenso für die Abstände dieser Punkte von den Tangenten von (M) und (C) hat man

$$p : p_c = L \sin H : L_c \sin H_c = -tg^3 H = -\frac{r^3}{\varrho^3}.$$

§ 5. **Verbiegung des Kreises zu Curven constanten Krümmungshalbmessers.** Da die Hauptnormalen beider Curven zusammenfallen, so findet dies auch mit den Ebenen der ganzen Krümmung und den von diesen erzeugten abwickelbaren Flächen statt.

Die beiden Eigenschaften, constanten Krümmungshalbmesser und constanten Schmiegungskugelradius zu besitzen, sind untrennbar mit einander verbunden. Besitzt eine Curve die eine, so hat sie auch zugleich die andere.

Durch Abwickelung der Tangentenfläche geht die Curve der Krümmungsmittelpunkte der Curven constanten Krümmungshalbmessers oder constanten Schmiegungskugelradius in einen Kreis über.

Man kann einen Kreis durch Verbiegung auf unendlich viele Arten in eine Curve desselben Krümmungshalbmessers transformiren.

Denn man construire die ganze Schaar aller seiner Tangenten; sie erfüllen den Aussenraum desselben und zerlegen die Ebene in unendlich schmale Winkelelemente, deren Schenkel die Tangenten sind. Indem man diese Winkelelemente um die Tangenten unendlich wenig rotiren lässt, ändern sich weder die Bogenelemente ds, noch die Contingenzwinkel $d\tau$, aber es entblättert sich die Ebene in die Schaar der Schmiegungsebenen der Transformationscurve. Die Krümmungshalbmesser behalten ihre Grösse $ds : d\tau$ gleich dem Radius des verbogenen Kreises, die Schmiegungshalbmesser aber können ein beliebiges Aenderungsgesetz befolgen. Denn die Amplitude der Rotation um die Tangente ist beliebig annehmbar.

§ 6. Asymptotische Linien windschiefer Flächen, insbesondere der Fläche der Hauptnormalen einer Curve. Zu jeder ebenen Curve giebt es eine Schaar paralleler Curven, welche mit ihr gemeinschaftliche Hauptnormalen besitzen. Die Fläche dieser Hauptnormalen ist die Ebene der Curve. Dasselbe findet bei der Schraubenlinie des Kreiscylinders statt. Denn da diese Linie eine geodätische Linie des Cylinders ist, so sind ihre Hauptnormalen zugleich Normalen dieser Fläche und bilden sie ein windschiefes Helicoid mit der Cylinderaxe als Strictionslinie. Dies Helicoid wird aber von der Cylinderschaar, welche die Axe gemein hat, in Schraubenlinien geschnitten, deren Hauptnormalenfläche es ist. Für andere Curven doppelter Krümmung besteht diese Eigenschaft nicht in dieser Ausdehnung, sondern nur unter bedeutenden Einschränkungen statt, so zwar, dass eine windschiefe Fläche entweder keine oder zwei (unter Umständen auch in eine zusammenfallende) Curven besitzt, für welche sie zugleich Fläche der Hauptnormalen ist und dass, wenn es auf ihr drei solche Curven giebt, sie nothwendig ein Helicoid und gemeinschaftliche Fläche der Hauptnormalen für unendlich viele Curven ist. Eine besondere hierher gehörige Gattung von Curven bilden die Curven constanten Krümmungshalbmessers, indem sie mit der Curve ihrer Krümmungsmittelpunkte gemeinschaftliche Hauptnormalen besitzen (§ 1).

Nach Cap. VII, § 1 ist jede Curve eine asymptotische Linie auf der Fläche der Hauptnormalen und zwar zugleich eine rechtwinklige Trajectorie der Erzeugungslinien dieser Fläche. Die Frage, ob und wie viel Curven auf einer windschiefen Fläche möglich sind, für welche sie gemeinschaftliche Fläche der Hauptnormalen ist, kommt daher auf die Untersuchung hinaus, wie viel Asymptotenlinien eine



Erzeugungslinie g der windschiefen Fläche rechtwinklig schneiden können. Die Fläche selbst kann hierfür durch das Schmiegungshyperboloid vertreten werden, welches sie längs g osculirt, d. h. mit ihr ausser g noch zwei unmittelbar folgende Erzeugungslinien gemein hat. Nun sind die Erzeugungslinien eines Hyperboloids parallel den Erzeugungslinien einer Kegelfläche zweiten Grades. Denken wir diese Kegelfläche gebildet und suchen wir die Erzeugungslinie γ derselben auf, welche g parallel ist. Eine Ebene, durch den Mittelpunkt der Kegelfläche senkrecht zu γ gelegt, enthält alle Richtungen, welche zu γ, also auch zu g senkrecht sind. Diese Ebene schneidet die Kegelfläche entweder in 0, oder einer oder zwei Geraden. Suchen wir daher umgekehrt zu diesen als Erzeugungslinien der Kegelfläche die parallelen Erzeugungslinien des Schmiegungshyperboloids auf, so sind sie die Tangenten der Curven, welche g zur gemeinschaftlichen Hauptnormalen haben, in den Punkten, in welchen sie g schneiden. In besonderen Fällen kann das Schmiegungshyperboloid ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid sein; dann bricht die Kegelfläche in zwei zu einander senkrechte Ebenen auf und giebt es zu jeder Geraden γ in der einen dieser Ebenen unendlich viele Geraden der andern, welche zu γ senkrecht sind. Dann giebt es aber auch unendlich viele Curven, welche g zu gemeinsamer Hauptnormale haben. Daher der Satz:

Auf einer windschiefen Fläche giebt es entweder keine, oder eine oder zwei oder unendlich viele Curven, für welche die Erzeugungslinien derselben gemeinschaftliche Hauptnormalen sind. Die Entscheidung, welcher dieser Fälle eintritt, hängt von der Beschaffenheit des Hyperboloids ab, welches sich längs einer Erzeugungslinie g der windschiefen Fläche anschmiegt. Ist dasselbe ein wirkliches Hyperboloid (kein hyperbolisches Paraboloid) und wird die Kegelfläche, deren Erzeugungslinien den Erzeugungslinien des Hyperboloids parallel sind, von einer Ebene ihres Mittelpunktes, welche senkrecht ist zu g, in 0, 1, 2 Geraden geschnitten, so ist sie für ebenso viele Curven auf der windschiefen Fläche gemeinschaftliche Fläche der Hauptnormalen. Ist aber die Schmiegungsfläche ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid, so giebt es unendlich viele solcher Curven.

§ 7. **Constanter Kreuzungswinkel der Tangenten und constanter Abstand der Punkte zweier Curven gemeinschaftlicher Hauptnormalen.** Wir wollen jetzt die Beziehungen entwickeln, welche zwischen zwei Curven (M) und (N) bestehen müssen, wenn dieselben gemeinschaftliche Hauptnormalen MN, $M'N'$, $M''N''$,... in den Punkten M und N, M' und N', M'' und N'',... haben sollen. Da die Hauptnormalen gemeinschaftlich sind, so sind es auch die Ebenen der ganzen Krümmung und besitzen beide Curven parallele rectificirende Ebenen und rectificirende Geraden. Daher bilden auch zwei aufeinanderfolgende rectificirende Geraden von (M) einen Winkel dH mit einander, gleich dem Winkel dH_1 der mit ihnen parallelen rectificirenden Geraden von (N). Diese Winkel dH, dH_1 sind aber die Aenderungen der Winkel H und H_1, welche die rectificirenden Geraden beider Curven mit ihren Tangenten bilden. Es ist daher $dH = dH_1$ oder $d(H - H_1) = 0$, mithin $H - H_1$ constant über die beiden Curven hinweg. Legt man nun durch die gemeinsame Hauptnormale MN und die Tangente in M die Schmiegungsebene des Punktes M und durch dieselbe Hauptnormale und die rectificirende Gerade von M die Ebene, welche den kürzesten Abstand der Hauptnormalen von der folgenden Hauptnormalen enthält, so bilden beide Ebenen, da sie zur rectificirenden Ebene von M senkrecht sind, den Winkel H mit einander. Ebenso bildet die Schmiegungsebene des Punktes N mit jener Ebene den Winkel H_1. Daher ist $H - H_1$ der Winkel der Schmiegungsebenen beider Curven in den Punkten M und N derselben Hauptnormale und folglich auch der Winkel, unter welchen sich die Tangenten in M und N kreuzen. Dieser Winkel ist also constant, d. h.:

Haben zwei Curven (M) und (N) gemeinschaftliche Hauptnormalen, so kreuzen sich die Tangenten in den Punkten M und N, in welchen sie dieselbe Hauptnormale treffen, unter constantem Winkel.

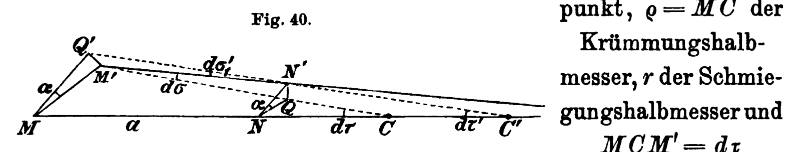
Da beide Curven die Hauptnormalen gemein haben, so ist auch der Winkel dk der ganzen Krümmung in den Punkten M und N derselben Hauptnormalen derselbe, und da die Tangenten dieser Punkte auf der Hauptnormalen senkrecht stehen, so wird $M'N' = MN \cdot \cos dk$, d. h. $M'N' = MN$; ebenso $M''N'' = M'N'$ u. s. f., d. h.:

Zwei Curven, welche gemeinschaftliche Hauptnormalen besitzen, haben constanten Abstand von einander.

§ 8. **Die Bertrand'sche lineare Relation.** Man kann die Bedingung, dass zwei Curven gemeinschaftliche Hauptnormalen besitzen, auf verschiedene Art ausdrücken. Zunächst kann man eine Relation zwischen der Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ und der Schmiegung $\frac{1}{r}$ der einen Curve angeben, welche erfüllt sein muss, wenn überhaupt noch eine zweite Curve existiren soll, welche mit ihr gemeinschaftliche Hauptnormalen besitzt.

Sind nämlich MN, $M'N'$ (Fig. 40) zwei aufeinanderfolgende Hauptnormalen der Curven (M) und (N), C der Krümmungsmittelpunkt, $\varrho = MC$ der Krümmungshalbmesser, r der Schmiegungshalbmesser und $MCM' = d\tau$ der Contingenzwinkel im Punkte M; zieht man in der Schmiegungsebene MCM' von M das Element NQ parallel MM' und verbindet N' und Q, so wird das unendlich kleine Dreieck $N'NQ$ bei Q rechtwinklig und enthält den constanten Winkel $N'NQ = \alpha$ der Tangenten in M und N, und wenn $MN = M'N' = a$ den constanten Abstand der beiden Curven, $N'M'Q = d\sigma$ aber den Schmiegungswinkel in M bezeichnet, so hat man

Fig. 40.



$$\sin\alpha = \frac{N'Q}{NN'} = \frac{a\,d\sigma}{NN'}, \quad \cos\alpha = \frac{(\varrho - a)\,d\tau}{NN'}$$

und mithin

$$tg\,\alpha = \frac{a}{\varrho - a} \cdot \frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{a}{\varrho - a} \cdot \frac{\varrho}{r}$$

oder

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{r}\,cotg\,\alpha = \frac{1}{a},$$

wofür man auch, indem man $a\,cotg\,\alpha = b$ setzt, schreiben kann:

$$\frac{a}{\varrho} + \frac{b}{r} = 1,$$

d. h.:

Wenn die Hauptnormalen einer Curve zugleich die Hauptnormalen einer zweiten Curve sind, so muss zwischen der Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ und Schmiegung $\frac{1}{r}$ der ersteren eine lineare Relation bestehen.

Diese, von Bertrand* gefundene Relation ist nicht blos nothwendig, sondern auch genügend, damit, wenn sie erfüllt ist durch

* Journal de mathém. pures et appliquées p. Liouville, Ire Série, T. XV.

die Curve (M), auf deren Fläche der Hauptnormalen eine zweite Curve (N) existirt, deren Hauptnormalen mit denen von (M) zusammenfallen. Denn construirt man auf der Fläche der Hauptnormalen von (M) die Curve (N) in constantem Abstande $MN = M'N' = \cdots = a$ von (M) und legt durch deren Tangenten Ebenen senkrecht zu den Erzeugungslinien dieser Fläche, so sind diese parallel den rectificirenden Ebenen von (M) und erzeugen eine abwickelbare Fläche, parallel jener, sodass ihre Erzeugungslinien den Erzeugungslinien jener parallel sind und ihre Gratlinie denselben Contingenzwinkel besitzt, wie sie. Die Ebene dieser Art, durch N senkrecht zu MN geführt, liefert aber das rechtwinklige unendlich kleine Dreieck $NN'Q$, für welches, wie oben die Gleichung

$$\frac{a}{\varrho} + \frac{a \operatorname{cotg} \alpha}{r} = 1$$

besteht. Diese mit

$$\frac{a}{\varrho} + \frac{b}{r} = 1$$

verglichen, zeigt, dass $a \operatorname{cotg} \alpha = b$, also α constant sein muss. Der Winkel α ist aber der Winkel, welchen die Tangenten in M und N mit einander bilden. Dieser Winkel ist aber die Differenz der Winkel H und H_1, welche die Erzeugungslinien der rectificirenden Fläche von (M) und ihrer Parallelfläche an (N) mit den Tangenten beiden Curven in M und N bilden. Daher ist die Differenz $H - H_1$ constant. Es wächst aber H um den Contingenzwinkel der Gratlinie der rectificirenden Fläche von (M) und mithin H_1 um denselben Winkel. Daher ist die Parallelfläche nach Cap. VI, § 13, X die rectificirende Fläche von (N), und da ihre Tangentenebenen senkrecht zu MN sind, so sind MN, $M'N'$, ... die Hauptnormalen nicht blos von (M), sondern auch von (N). Daher:

Besteht zwischen der Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ und Schmiegung $\frac{1}{r}$ einer Curve (M) eine lineäre Relation $\frac{a}{\varrho} + \frac{b}{r} = 1$, so giebt es auf der Fläche der Hauptnormalen derselben in constantem Abstande a eine zweite Curve (N), welche mit (M) gemeinschaftliche Fläche der Hauptnormalen besitzt und deren Tangenten gegen die Tangenten der ersteren unter dem Kreuzungswinkel α geneigt sind, wofür $\operatorname{cotg} \alpha = b:a$ ist.

§ 9. Andere Form der Bertrand'schen Relation. Wäre man in § 8 statt von der Curve (M) von der Curve (N) aus-

gegangen, deren Krümmungs- und Schmiegungshalbmesser ϱ' und r' sein mögen, so hätte man (Fig. 40) aus dem Dreieck $MM'Q'$ gezogen:

$$\sin\alpha = \frac{a\,d\sigma'}{MM'}, \quad \cos\alpha = \frac{(\varrho'+a)\,d\tau'}{MM'}$$

und weiter erhalten

$$-\frac{a}{\varrho'} + \frac{b}{r'} = 1,$$

wo $a \operatorname{cotg}\alpha = b$ gesetzt ist.

Die Curven constanten Krümmungshalbmessers entsprechen dem Falle $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, $b = 0$. Für sie $\varrho = a$. Für $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ wird $b = 1$ und reducirt sich die Bertrand'sche Relation auf

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{r} = \frac{1}{a}.$$

Es genügen daher auch die Curven, für welche die Summe der Krümmung und Schmiegung constant ist, der Bedingung gemeinschaftlicher Fläche der Hauptnormalen.

§ 10. Weitere Relationen. Durch Elimination von a aus den beiden Gleichungen

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{r}\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{a}, \quad -\frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{r'}\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{a}$$

folgt

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)\operatorname{cotg}\alpha + \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right) = 0; \quad \text{also} \quad \operatorname{cotg}\alpha = -\frac{\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}},$$

die Elimination von α giebt

$$\frac{1 - \frac{a}{\varrho}}{1 + \frac{a}{\varrho'}} \cdot \frac{r}{r'} - 1 \quad \text{oder} \quad a = \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}}{\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{1}{r'} + \frac{1}{\varrho'}\cdot\frac{1}{r}}.$$

Aus

$$\sin\alpha = \frac{a\,d\sigma}{ds'}, \quad \sin\alpha = \frac{a\,d\sigma'}{ds}$$

folgt mit Hülfe von

$$r = \frac{ds}{d\sigma}, \quad r' = \frac{ds'}{d\sigma'}:$$

$$r\,r' = \left(\frac{a}{\sin\alpha}\right)^2,$$

d. h.:

Das Product der Schmiegungshalbmesser zweier Curven von gemeinsamer Fläche der Hauptnormalen in den Punkten derselben Hauptnormalen ist constant über die Curve hinweg.

Ferner folgt aus

$$\cos\alpha = (\varrho - a)\frac{d\tau}{ds'}, \quad \cos\alpha = (\varrho' + a)\frac{d\tau'}{ds} \quad \text{und} \quad \frac{ds}{d\tau} = \varrho, \quad \frac{ds'}{d\tau'} = \varrho':$$

$$\cos^2\alpha = \left(1 - \frac{a}{\varrho}\right)\left(1 + \frac{a}{\varrho'}\right).$$

Diese Relation lässt eine interessante geometrische Interpretation zu. Sind auf der Hauptnormalen MN die Krümmungsmittelpunkte der Curven (M) und (N) die Punkte C und C', so hat man

$$MC = \varrho, \quad NC' = \varrho', \quad MC' = \varrho' + a, \quad NC = \varrho - a$$

und mithin

$$\frac{MC}{CN} : \frac{MC'}{C'N} = \cos^2\alpha,$$

d. h.:

Der constante Abstand MN zweier Curven (M) und (N) gemeinschaftlicher Hauptnormalen wird durch die Krümmungsmittelpunkte C, C' derselben nach constantem Doppelverhältniss getheilt. Der Werth dieses Doppelverhältnisses ist das Quadrat des Cosinus des constanten Winkels, unter welchem sich die Tangenten in M und N kreuzen.

Da dieser Werth positiv ist, so folgt:

Die Krümmungsmittelpunkte beider Curven liegen entweder stets zwischen M und N oder ausserhalb der Strecke MN, niemals aber liegt der eine dazwischen und der andere ausserhalb. M, N, C, C' können nie vier harmonische Punkte sein.

§ 11. Darstellung der Krümmung und Schmiegung der einen von zwei Curven gemeinschaftlicher Hauptnormalen durch die der andern. Um $\frac{1}{\varrho'}$ und $\frac{1}{r'}$ als Functionen von $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{r}$ darzustellen, wollen wir zunächst die beiden Relationen

$$\frac{a}{\varrho} + \frac{b}{r} = 1, \quad -\frac{a}{\varrho'} + \frac{b}{r'} = 1$$

umschreiben, indem wir die Bogenelemente ds, ds_1 beider Curven einführen, nämlich:

$$ds = a\,d\tau + b\,d\sigma, \quad ds' = -a\,d\tau' + b\,d\sigma'$$

und für die Quadrate von ds, ds_1 die beiden Gleichungen

$$ds'^2 = (a^2 + b^2)d\sigma^2, \quad ds^2 = (a^2 + b^2)d\sigma'^2$$

ableiten. Man hat nämlich:

$$\begin{cases} ds'^2 = \overline{NN'}^2 = \overline{N'Q}^2 + \overline{QN}^2 = \overline{N'Q}^2 + \overline{N'Q}^2 \cot g^2 \alpha = (1 + \cot g^2 \alpha) \overline{N'Q}^2 \\ \quad = (1 + \cot g^2 \alpha)(M'N' \cdot d\sigma)^2 = (1 + \cot g^2) a^2 d\sigma^2 = (a^2 + b^2) d\sigma^2 \end{cases}$$

und ähnlich

$$\begin{cases} ds^2 = \overline{MM'}^2 = \overline{M'Q}^2 + \overline{Q'M}^2 = \overline{M'Q'}^2 + \overline{M'Q'}^2 \cot g^2 \alpha \\ \quad = (1 + \cot g^2 \alpha) \overline{M'Q'}^2 = (1 + \cot g^2 \alpha)(a \cdot d\sigma')^2 = (a^2 + b^2) d\sigma'^2. \end{cases}$$

Setzt man hieraus die Werthe von ds' und ds, ausgedrückt durch $d\sigma$ und $d\sigma'$ ein, so folgt:

$$d\tau' = \frac{b\,d\tau - a\,d\sigma}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad d\sigma' = \frac{a\,d\tau + b\,d\sigma}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

mithin

$$\varrho' = \frac{ds'}{d\tau'} = \frac{(a^2 + b^2)\,d\sigma}{b\,d\tau - a\,d\sigma} = \frac{\frac{a^2 + b^2}{r^2}}{\frac{b}{\varrho r} - \frac{a}{r^2}}$$

oder wegen $b = r\left(1 - \frac{a}{\varrho}\right)$

$$\varrho' = \frac{\frac{a^2}{r^2} + \left(1 - \frac{a}{\varrho}\right)^2}{\frac{1}{\varrho} - a\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}\right)}$$

und ebenso

$$r' = r\left[\frac{a^2}{r^2} + \left(1 - \frac{a}{\varrho}\right)^2\right].$$

§ 12. **Das windschiefe Helicoid als Hauptnormalenfläche.** Giebt es auf der Fläche der Hauptnormalen einer Curve (M) ausser ihr noch zwei andere Curven (N) und (P), welche mit (M) die Fläche der Hauptnormalen gemein haben, so muss die Bertrand'sche Relation von der Curve (M) zweimal erfüllt werden. Ist nämlich α der constante Winkel, unter welchem die Tangenten an (M) und (N), β der constante Winkel, unter welchem die Tangenten (M) und (P) sich kreuzen, und sind a und a' die Abstände der Curven (M) und (N) sowie (M) und (P) von einander, so hat man

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{r}\cot g\,\alpha = \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{r}\cot g\,\beta = \frac{1}{a'},$$

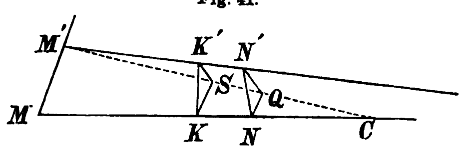
woraus für ϱ und r constante Werthe folgen. Daher ist nach Cap. VI, § 13, VIII die Curve (M) eine Helix eines Kreiscylinders und mithin die Fläche der Hauptnormalen ein windschiefes Helicoid, welches die Axe des Cylinders zur Strictionslinie hat und gemeinschaftliche Fläche der Hauptnormalen ist, für alle Helixe, in welcher es von der Schaar coaxialer Cylinder geschnitten werden kann Daher:

Giebt es auf einer windschiefen Fläche drei Curven, für welche sie gemeinschaftliche Fläche der Hauptnormalen ist, so giebt es auf ihr unendlich viele solche Curven und ist die Fläche ein Helicoid und sind die Curven Helixe auf einer Schaar Kreiscylinderflächen, welche die gerade Strictionslinie des Helicoids zur gemeinschaftlichen Axe haben; sowie:

Das windschiefe Helicoid ist die einzige Fläche, auf welcher es mehr als zwei Curven giebt, für welche die Erzeugungslinien der Fläche gemeinschaftliche Hauptnormalen sind.

Diese Sätze erhalten wir auch unmittelbar mit Hülfe des Schmiegungshyperboloids. Denn die Tangenten jener drei Curven schneiden drei aufeinanderfolgende Erzeugungslinien rechtwinklig; daher sind diese Erzeugungslinien alle drei parallel einer Ebene, ebenso wie die drei Tangenten einer zu dieser Ebene senkrechten Ebene parallel laufen. Daher ist das Schmiegungshyperboloid ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid. Diese Beziehungen gelten für jede und die beiden ihr folgenden Erzeugungslinien. Daher laufen alle Erzeugungslinien der Fläche der Hauptnormalen einer Ebene parallel und diese ist die Ebene der ganzen Krümmung und der kürzeste Abstand zweier Hauptnormalen hat die Richtung der rectificirenden Geraden. Diese rectificirenden Geraden sind daher alle parallel; die rectificirende Fläche ist daher eine Cylinderfläche. Da der kürzeste Abstand zweier Hauptnormalen auch die dritte Hauptnormale rechtwinklig schneidet, so fallen die kürzesten Abstände aller Hauptnormalen zusammen und ist die Strictionslinie der Fläche der Hauptnormalen eine Gerade. Die rectificirende Fläche ist daher ein Kreiscylinder und die Fläche der Hauptnormalen ein windschiefes Helicoid. Der Beweis der obigen Sätze kann auch unmittelbar ohne directen Gebrauch der Bertrand'schen Relation und des Schmiegungshyperboloids auf folgende Art geführt werden.

Fig. 41.



Sind nämlich (Fig. 41)

$$MN = M'N' = M'Q = a \quad \text{und} \quad MK = M'K' = MS = a'$$

die constanten Abstände der Curven (N) und (K) von der Curve (M)

und haben S und Q dieselbe Bedeutung, welche Q im § 8 hatte, so sind auch die drei Verhältnisse

$$\frac{SK'}{SK}, \quad \frac{N'Q}{SK'}, \quad \frac{NQ}{N'Q}$$

constant. Das erste ist nämlich die Tangente der constanten Neigung der Curve (K) gegen die Curve (N), das zweite ist gleich $\frac{M'Q}{M'S} = \frac{a}{a'}$ und das dritte giebt die Cotangente der Neigung der Curve (N) gegen die Curve (M) an. Daher ist auch der Werth ihres Products, nämlich das Verhältniss

$$\frac{NQ}{SK}$$

constant. Nun sind aber NQ und SK parallel MM', weil sie die Durchschnitte der drei parallelen rectificirenden Ebenen der drei Curven mit der Schmiegungsebene von M sind, daher ist auch $\frac{NC}{KC}$ und folglich auch, $1 - \frac{NC}{KC}$ d. h.

$$\frac{KN}{KC}$$

constant. Es ist aber $KN = a - a'$, daher muss KC und folglich auch $MC = KC + a$ constant sein; d. h. es ist der Krümmungshalbmesser $MC = \varrho$ der Curve (M) constant. Ebenso ergiebt sich, dass die Krümmungshalbmesser der beiden andern Curven constant sein müssen.

Weiter ist aber

$$\frac{SK}{SK'} = \frac{KC \cdot d\tau}{M'K' \cdot d\sigma} = \frac{\varrho - a'}{a'} \cdot \frac{d\tau}{d\sigma}$$

und da dies Verhältniss nach § 8 constant ist, so folgt, dass auch

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{r}{\varrho}$$

und da ϱ bereits constant ist, auch r constant sein muss. Ebenso für die beiden andern Curven.

Die drei Curven sind demnach Helixe auf Kreiscylindern und die Fläche ihrer gemeinschaftlichen Hauptnormalen ist mithin ein windschiefes Helicoid, dessen Erzeugungslinien alle einer Ebene parallel laufen. Auf diesem Helicoid giebt es nun unzählig viele Helixe, nämlich jeder um die gerade Strictionslinie desselben mit beliebigem Radius beschriebene Kreiscylinder schneidet das Helicoid in einer solchen Curve und für alle diese ist dasselbe gemeinsame Fläche der Hauptnormalen.

Auf einer beliebigen windschiefen Fläche, welche nicht Helicoid ist, giebt es also höchstens zwei Curven von der erwähnten Eigenschaft. Bertrand hatte den Satz aufgestellt, dass es unmöglich sei, dass eine windschiefe Fläche für zwei verschiedene Curven zugleich Fläche der Hauptnormalen sei, wenn die Strictionslinie der Fläche die Erzeugungslinie rechtwinklig schneide. Graves hat diesen Satz berichtigt. Das Helicoid hat in der That eine Gerade als Strictionslinie, welche die sämmtlichen Erzeugungslinien rechtwinklig schneidet.

Literatur zum Problem der gemeinschaftlichen Hauptnormalen.

De Saint-Vénant, Mémoire sur les lignes courbes non planes, pr. à l'Acad. des sciences le 16. sept. 1844 (76 S.). Journ. de l'école polytechn. T. XVIII (Cah. 30) (1845). Hierin ist (S. 48, Note) das Problem zum ersten Male gestellt worden.

Bertrand, Mémoire sur les courbes à double courbure. Journ. de mathém. pures et appl. p. Liouville. 1re Série, T. XV, p. 332—350 (1850).

Serret, J. A., Sur un théorème relatif aux courbes à double courbure. Journ. de math. p. et appl. p. Liouville, 1re Série, T. XVI, p. 193—207. — Condition pour que les normales principales d'une courbe soient des normales principales d'une seconde courbe. Comptes rend. de l'Acad. des sc. T. 85, p. 307—308 (1877).

Voizot, Note sur la théorie des courbes à double courbure. Journ. de math. p. et appl. p. Liouville, 1re Série, T. XV, p. 481—486 (1850).

Curtis, Sur la surface, engendrée par les normales principales d'une courbe à double courbure. Journ. de math. p. Liouville, 2me Série, T. I, p. 223 — 229. (1856).

Mannheim, Sur la surface gauche, lieu des normales principales de deux courbes. Journ. de math. p. Liouville, 2me Série, T. XVII, p. 406 à 417 (1872). Rein geometrische Behandlung des Problems. — Sur les courbes ayant les mêmes normales principales et sur la surface formée par ces normales. Comptes rendus de l'Acad. des sciences. T. 85, p. 212—219 (1877). — Nouveau mode de représentation plane de classes de surfaces réglées. Compt. r. T. 85, p. 788—791. — Applications d'un mode de représentation plane de classes de surfaces réglées. C. r. T. 85, p. 941—944. — De l'emploi de la courbe représentative de la surface des normales principales d'une courbe gauche pour la démonstration de propriétés relatives à cette courbe. C. r. T. 86, p. 1254—1256 (1878). — Principes et dévéloppements de géométrie cinématique. Paris 1894, p. 364—379.

Fais, Nota intorno alle curve gobbe aventi le stesse normali principali. Memorie della Accademia delle scienze dell'Instituto di Bologna. Serie 3za, T. VIII, p. 609—624 (1877).

IX. Capitel.

Die Fläche der Binormalen und die Fläche der Ebenen der ganzen Krümmung.

§ 1. Die Curve als Strictionslinie der Binormalenfläche. Nach Cap. I, § 9 erzeugen die Binormalen einer Curve (M) eine windschiefe Fläche, auf welcher die Curve selbst liegt und den Durchschnitt derselben mit der Fläche der Hauptnormalen und der rectificirenden Fläche darstellt. Die Curve schneidet die Binormalen unter rechten Winkeln und da zwei aufeinanderfolgende Binormalen auf den zugehörigen Schmiegungsebenen senkrecht stehen und diese sich in der Tangente der Curve schneiden, so stehen sie auch beide auf dieser senkrecht. Es ist daher die Tangente der Curve (M) die Linie kürzesten Abstandes zweier aufeinanderfolgenden Binormalen. Da dies von jeder Tangente gilt und diese sich in den Punkten der Curve schneiden, so folgt, dass die Curve (M) die Strictionslinie der Fläche ihrer Binormalen ist und dass die Fläche der Binormalen stets eine orthogonale Striction hat. Umgekehrt ist jede windschiefe Fläche mit orthogonaler Strictionslinie die Fläche der Binormalen dieser Curve. Denn jede Erzeugungslinie steht senkrecht auf der Linie ihres kürzesten Abstandes von der vorhergehenden und gleichzeitig senkrecht auf der Linie ihres kürzesten Abstandes von der folgenden Erzeugungslinie. Daher steht sie senkrecht auf beiden, also auch auf der Ebene beider. Da diese Linien aber wegen der Rechtwinkligkeit der Striction Tangenten der Strictionslinie sind, so ist ihre Ebene die Schmiegungsebene dieser Curve und folglich die Erzeugungslinie der Fläche im Punkte der Strictionslinie senkrecht auf deren Schmiegungsebene, d. h. die Binormale.

§ 2. Beziehungen der Binormalenfläche zur Fläche der Krümmungsaxen und zur rectificirenden Fläche. Die Binormalen einer Curve sind parallel den Krümmungsaxen derselben und die Normalebenen sind senkrecht zu den Linien kürzesten Abstandes der Binormalen. Daher sind die Normalebenen Tangentenebenen an die Fläche der Binormalen in unendlich fernen Punkten, d. h. Asymptotenebenen und folglich sind die Fläche der Krüm-

mungsaxen und die Fläche der Binormalen Asymptotenflächen von einander. (Vgl. Cap. VII, § 9.)

Die rectificirenden Ebenen der Curve sind Tangentenebenen der Fläche in den Punkten der Curve, daher ist die rectificirende Fläche der Fläche der Binormalen längs der Curve umschrieben.

§ 3. Specielle Fälle. Ist die Curve eben, so geht die Fläche der Binormalen in einen Cylinder über, welcher mit dem rectificirenden Cylinder zusammenfällt; ist die Curve sphärisch, so sind die Binormalen alle parallel den Erzeugungslinien eines Kegels.

§ 4. Nach Cap. VI, § 10 erzeugt die Ebene der ganzen Krümmung eine abwickelbare Fläche, deren Erzeugungslinien den Hauptnormalen parallel laufen und die rectificirenden Ebenen in den Punkten Q (Fig. 28) schneiden im Abstande $MQ = P \cos H = \frac{PR}{r}$. Die Ebenen der ganzen Krümmung sind senkrecht zu den Linien des kürzesten Abstandes zweier aufeinanderfolgenden Hauptnormalen und berühren die Fläche der Hauptnormalen im Unendlichen, sie sind also Asymptotenebenen dieser Fläche. Daher sind die abwickelbare Fläche der Ebenen der ganzen Krümmung und die Fläche der Hauptnormalen Asymptotenflächen zu einander.

X. Capitel.

Die Schmiegungshelix und die conische Schmiegungsloxodrome.

§ 1. Cylinderloxodrome. Eine Curve, welche gegen die Linien schwächster oder stärkster Krümmung einer Fläche unter constantem Winkel geneigt ist, heisst eine Loxodrome der Fläche. Ist die Fläche eine Cylinderfläche, deren Erzeugungslinien das System der Linien schwächster Krümmung bilden, so wird sie auch eine Schraubenlinie, Schneckenlinie oder eine Helix genannt. Den vorhergehenden Capiteln zufolge haben die Helixe, welche auf beliebigen Cylinderflächen liegen, folgende Eigenschaften:

1. Die Cylinderfläche ist rectificirende Fläche der Helix, die Ebenen der ganzen Krümmung sind sämmtlich untereinander und die Hauptnormalen ihnen parallel; die Hauptnormalen sind Normalen des Cylinders.

2. Die Verhältnisse der Radien ϱ, r, R sind constant, nämlich

$$\frac{r}{\varrho} = tg\,\alpha, \quad \frac{R}{\varrho} = sin\,\alpha, \quad \frac{R}{r} = cos\,\alpha,$$

wenn α den constanten Neigungswinkel der Helix gegen die Erzeugungslinie des Cylinders bedeutet.

3. Die Verhältnisse des Contingenz-, Schmiegungs- und des Winkels ganzer Krümmung sind constant, nämlich

$$\frac{d\tau}{dk} = sin\,\alpha, \quad \frac{d\sigma}{dk} = cos\,\alpha, \quad \frac{d\tau}{d\sigma} = tg\,\alpha$$

und dk ist zugleich der Winkel der Projectionen zweier Krümmungshalbmesser auf die Ebene ganzer Krümmung, mithin der Contingenzwinkel des Orthogonalschnitts der Fläche (Linie stärkster Krümmung).

4. Die Bogenelemente ds der Helix und ds_0 des Orthogonalschnitts stehen in dem Verhältniss

$$\frac{ds}{ds_0} = \frac{1}{sin\,\alpha}.$$

5. Daher stehen die Krümmungshalbmesser ϱ, ϱ_0 der Helix und des Orthogonalschnitts in dem Verhältniss

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{1}{sin^2\,\alpha},$$

und es ist mithin

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{sin^2\,\alpha}, \quad r = \frac{\varrho_0}{sin\,\alpha\,cos\,\alpha}, \quad R = \frac{\varrho_0}{sin\,\alpha}.$$

6. Der kürzeste Abstand dn zweier Hauptnormalen ist die Projection des Bogenelementes auf die Erzeugungslinie des Cylinders, nämlich

$$dn = ds \cdot cos\,\alpha = ds_0 \cdot cotg\,\alpha = \varrho_0\, cotg\,\alpha \cdot dk.$$

7. Die Entfernung u der Linie kürzesten Abstandes zweier Krümmungshalbmesser von dem Punkte der Curve ist

$$u = \frac{R^2}{\varrho} = \varrho_0$$

d. h.:

Die Linie kürzesten Abstandes geht durch die Punkte der Evolute des Orthogonalschnitts, und das Bogenelement der Strictionslinie der Fläche der Hauptnormalen hat das Bogenelement der Evolute zur Projection. Daher ist das Bogenelement der Strictionslinie durch die Gleichung gegeben

$$\overline{ds}^2 = \varrho_0^2\, cotg^2\alpha \cdot dk^2 + d\varrho_0^2$$

und die Tangente seiner Neigung gegen die Hauptnormale ist

$$tg\,\eta = \frac{ds\,cos\,\alpha}{d\,(\varrho\,sin^2\,\alpha)} = \frac{d\,s_0}{d\varrho_0} \cdot cotg\,\alpha.$$

8. Der Abstand des Mittelpunktes der Schmiegungskugel von dem Krümmungsmittelpunkte ist

$$h = \frac{d\varrho}{d\sigma} = \frac{d\varrho_0}{dk} \cdot \frac{1}{\sin^2\alpha \cos\alpha},$$

der Radius der Schmiegungskugel

$$\overset{*}{R} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \sqrt{\varrho_0^2 + \left(\frac{d\varrho_0}{dk\cos\alpha}\right)^2}$$

und die Tangente seiner Neigung gegen die Schmiegungsebene:

$$tg\,\mu = \frac{h}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_0 \cos\alpha} \cdot \frac{d\varrho_0}{dk}.$$

§ 2. Loxodrome des Kreiscylinders oder Helix. Hieraus folgt noch insbesondere, wenn die Cylinderfläche ein Kreiscylinder, also ϱ_0 constant ist neben den Sätzen 1—6.

7*) $\overline{ds} = dn = ds\cos\alpha,\ \eta = \frac{1}{2}\pi$; mithin ist die Strictionslinie die Axe des Cylinders (Cap. VII, §§ 10. 11).

8*) $h = 0,\ \overset{*}{R} = \varrho,\ \mu = 0.$

§ 3. Schmiegungshelix. Hat eine Helix auf einem Kreiscylinder mit einer Curve (M) doppelter Krümmung drei aufeinanderfolgende Punkte gemein, so hat sie auch die Tangente, Schmiegungsebene, Hauptnormale, rectificirende Ebene und den Krümmungskreis mit ihr gemein. Vier Punkte von ihr können aber nicht mit vier Punkten der Curve zusammenfallen, ohne dass die Curve (M) specielle Eigenschaften erlangt. Denn dann müssten auch die Schmiegungskugeln zusammenfallen, was nicht angeht, da bei der Cylinderhelix der Schmiegungskugelmittelpunkt mit dem Krümmungsmittelpunkt zusammenfällt, was bei einer beliebigen Curve (M) im Allgemeinen nicht der Fall ist. Es kann also die Cylinderhelix die Curve (M) im Allgemeinen nicht in der dritten Ordnung berühren. Allein durch drei Punkte ist die Helix noch nicht bestimmt. Sind nämlich M, M', M'' die drei Punkte, zieht man durch sie drei Gerade, welche gleiche Neigung gegen die Tangenten MM' und $M'M''$ haben und schneidet sie durch eine Ebene senkrecht zu ihrer Richtung, so erhält man drei neue Punkte, welche einen Kreis bestimmen, den man als Orthogonalschnitt eines Cylinders ansehen kann, auf welchem es offenbar eine Helix giebt, welche durch jene drei Punkte geht. Da man aber unendlich viele Richtungen finden kann, welche gegen die Tangenten in M und M' gleich geneigt

sind, so ist der Cylinder und mit ihm die Helix unbestimmt und giebt es eine ganze Schaar Cylinder und Helixe, welche durch die drei Punkte gehen und also die Curve in der zweiten Ordnung berühren. Unter diesen Cylindern giebt es aber einen, von welchem eine Erzeugungslinie mit der rectificirenden Geraden zusammenfällt, denn diese ist eine Linie, welche gegen zwei Tangenten der Curve gleich geneigt ist, weil durch Abwickelung der rectificirenden Fläche die Curve in eine Gerade übergeht. Die Helix, welche auf diesem Cylinder liegt, hat mit der Curve nicht blos die rectificirende Ebene des Punktes M, sondern auch die rectificirende Ebene des folgenden Punktes M' gemein, welche diese in der rectificirenden Geraden schneidet, sie hat folglich mit der Curve auch die Richtung der zweiten Hauptnormale gemein, wenn auch nicht den Krümmungskreis des Punktes M'. Sie schmiegt sich daher der Curve enger an, als alle andern Helixe, welche sie in der zweiten Ordnung berühren und ihre Berührung ist, wenn man so sagen will, von einer Ordnung, welche zwischen die zweite und dritte Ordnung fällt. Die Helix eines Kreiscylinders, welche mit der Curve drei aufeinanderfolgende Punkte M, M', M'' und die rectificirende Gerade in M gemein hat, nennen wir die Schmiegungshelix der Curve im Punkte M.

§ 4. Die Schmiegungshelix hat mit der Curve nicht blos den Krümmungshalbmesser, sondern auch den Schmiegungshalbmesser gemein. Ist nämlich α der constante Winkel, unter welchem die Helix die Erzeugungslinien des Cylinders schneidet und H die Neigung der rectificirenden Geraden der Curve gegen die Tangente, so ist, weil diese Geraden zusammenfallen sollen, $\alpha = H$. Sind nun ϱ, r, ϱ_0, r_0 die entsprechenden Radien der Krümmung und Schmiegung der Curve (M) und der Helix, so ist

$$\frac{r}{\varrho} = tg\, H, \quad \frac{r_0}{\varrho_0} = tg\, \alpha$$

und folglich

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{r_0}{\varrho_0}$$

und da wegen des beiden Curven gemeinsamen Krümmungskreises $\varrho = \varrho_0$ ist,

$$r = r_0.$$

§ 5. Basisradius und Axe der Schmiegungshelix. Da die rectificirende Gerade die Erzeugungslinie des Cylinders ist, auf

welchem die Helix liegt, so fällt der Orthogonalschnitt derselben in die Ebene der ganzen Krümmung. Daher ist die Helix bestimmt, sobald der Radius a dieses Orthogonalschnitts bekannt ist. Dieser findet sich aber aus der Gleichung

$$\frac{a}{sin^2 \alpha} = \varrho \quad (\S\ 1,\ \text{Nr. } 5)$$

wegen $\alpha = H$, als:

$$a = \varrho\ sin^2 H = \frac{R^2}{\varrho} = u.$$

Er ist der Abstand des Centralpunktes der Hauptnormalen vom Curvenpunkte und die Axe der Schmiegungshelix ist die Linie kürzesten Abstandes der Hauptnormalen von der folgenden Hauptnormalen.

Die Schmiegungsebene schneidet den Cylinder in einer Ellipse, welche ϱ zum Krümmungshalbmesser hat.

§ 6. Axenfläche der Schmiegungshelixe. Die rectificirende Fläche ist der Ort der Erzeugungslinien der Cylinder, auf welchen die Schmiegungshelixe liegen. Die Axen dieser Cylinder sind die Linien kürzesten Abstandes der Hauptnormalen und bilden eine Fläche, deren Erzeugungslinie den rectificirenden Geraden parallel ist. Diese Fläche ist windschief und asymptotisch zur rectificirenden Fläche.

§ 7. Die rectificirende Ebene als Ort der Erzeugungslinien von Cylindern, welche die Curve in der zweiten Ordnung berühren. Zufolge § 3 muss die Erzeugungslinie eines Kreiscylinders, welcher die Curve in der zweiten Ordnung berühren soll, gleiche Neigung gegen zwei aufeinanderfolgende Tangenten der Curve haben. Der Ort aller solcher Geraden ist eine Ebene, welche senkrecht auf der Schmiegungsebene steht und den Contingenzwinkel halbirt. Diese Ebene fällt in der Grenze mit der rectificirenden Ebene zusammen. Daher:

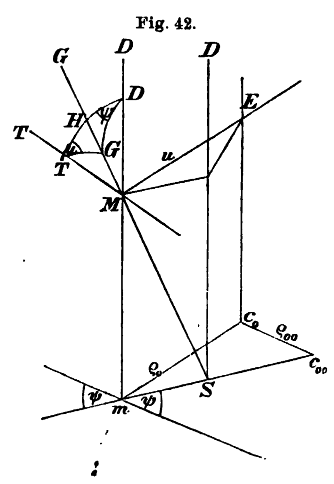
Der Ort der Erzeugungslinien der Cylinder, welche eine Curve doppelter Krümmung in der zweiten Ordnung berühren, ist die rectificirende Ebene.

Unter der Schaar dieser Cylinder ist einer, dessen Erzeugungslinie mit der Binormalen zusammenfällt, er geht durch den Krümmungskreis und ist bereits oben Cap. V, § 10 erwähnt worden und einer, dessen Erzeugungslinie die Tangente ist, er fällt mit der

Schmiegungsebene zusammen. Macht die Erzeugungslinie mit der Tangente einen Winkel β, so ist der Contingenzwinkel des Orthogonalschnitts $\frac{d\tau}{\sin\beta}$ und sein Bogenelement $ds \sin\beta$, folglich der Radius derselben $\frac{ds}{d\tau}\sin^2\beta$ oder $\varrho \sin^2\beta$. Für $\beta = 90^0$ erreicht dieser Ausdruck sein Maximum.

§ 8. Die Loxodrome der Rotationskegelfläche. Auf einer Rotationskegelfläche vom Mittelpunkte S (Fig. 42), der Axe SD und der halben Oeffnung $DSG = \gamma$ liege eine Loxodrome, deren Tangente MT gegen die Erzeugungslinie SG unter dem constanten Winkel α geneigt sei. Sie hat den Mittelpunkt S zum asymptotischen Punkt, dem sie sich von beiden Seiten in unendlich vielen Windungen annähert. Eine Gerade MD parallel der Axe SD, die Erzeugungslinie MG und die Tangente MT bilden in M eine dreiflächige Ecke, welche an der Kante MG einen rechten Winkel hat, indem die Tangentenebene der Kegelfläche die Meridianebene senkrecht schneidet. Die diesen rechten Winkel einschliessenden Seitenflächen der Ecke haben die constanten Winkel α und γ und bleibt die Ecke unveränderlich, wo auch immer der Punkt M auf der Loxodrome liege. Eine mit der Einheit als Radius um M beschriebene Kugelfläche liefert das entsprechende sphärische Dreieck DTG, dessen Hypotenuse DT mit H und dessen Winkel D und T mit ψ und μ bezeichnet werden mögen.

Fig. 42.



1. Die constante Hypotenuse H, wofür $\cos H = \cos\alpha \cos\gamma$, zeigt, dass die Tangente MT der Loxodrome constante Neigung gegen die Erzeugungslinie MD einer Cylinderfläche hat, parallel zur Kegelaxe SD. Daher ist die Curve zugleich eine Loxodrome dieser Cylinderfläche und diese die rectificirende Fläche derselben. Die Erzeugungslinie MD ist die rectificirende Gerade und die Tangentenebene DMT der Cylinderfläche die rectificirende Ebene. Es bildet daher die rectificirende Ebene der Loxodrome mit der Meridianebene DSG einen constanten Winkel ψ, für welchen $tg\,\psi = tg\,\alpha : \sin\gamma$ ist.

Der Orthogonalschnitt der rectificirenden Cylinderfläche ist daher eine logarithmische Spirale mit dem Pole auf der Kegelaxe und der Neigung ψ der Tangente gegen den Radiusvector, der vom Pole nach dem Punkte der Spirale geht. Die rectificirende Fläche ist demnach ein logarithmischer Spiralcylinder mit der Axe des Kegels als Spiralaxe und der Neigung ψ seiner Tangentenebene gegen die Meridianebene des Kegels.

2. Die Hauptnormalen der Loxodrome sind senkrecht zu den Tangentenebenen des Spiralcylinders, als der rectificirenden Ebene der Loxodrome, und sind Normalen dieses Cylinders in den Punkten M der Curve, sie laufen alle einer Ebene parallel, nämlich der Ebene des Orthogonalschnitts des Cylinders und alle Ebenen der ganzen Krümmung sind ihr parallel. Die Linien kürzesten Abstandes zweier aufeinanderfolgender Hauptnormalen sind parallel den rectificirenden Geraden, also parallel der Kegelaxe und erzeugen eine Cylinderfläche, welche die Fläche der Hauptnormalen in deren Strictionslinie schneidet. Die Projectionen der Hauptnormalen auf die Ebene des Orthogonalschnitts, der logarithmischen Spirale, sind Normalen dieser ebenen Curve und schneiden sich daher in den Krümmungsmittelpunkten c_0 dieser (Fig. 43). Die Linien kürzesten Abstandes der Hauptnormalen gehen durch die Punkte c_0 der Evolute der logarithmischen Spirale und sind ihre Abstände u von den Curvenpunkten M der Loxodrome gleich den Krümmungshalbmessern ϱ_0 dieser Evolute.

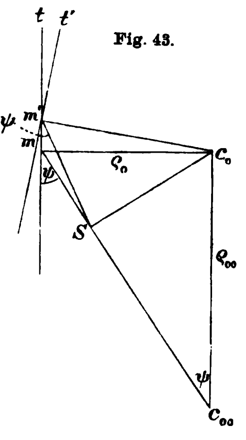


Fig. 43.

Nun ist die Evolute einer logarithmischen Spirale selbst wieder eine logarithmische Spirale von derselben Tangentenneigung ψ, aber um $\frac{1}{2}\pi$ in der Ebene gegen jene gedreht. Daher ist die Cylinderfläche der kürzesten Abstände der Hauptnormalen ein logarithmischer Spiralcylinder von gleicher Neigung ψ, mit dem Spiralcylinder der rectificirenden Geraden aber um $\frac{1}{2}\pi$ gegen diesen gedreht. Ist nämlich S der Pol der logarithmischen Spirale m und bilden die Tangenten t, t' in zwei aufeinanderfolgenden Punkten m, m' mit den Radienvectoren Sm, Sm' Winkel gleich ψ, so folgt aus dem Dreieck Smm', dass der Winkel mSm'

der Radienvectoren gleich dem Contingenzwinkel $tm't'$ der Spirale ist. Dieser Contingenzwinkel ist aber gleich dem Winkel mc_0m' der Normalen mc_0, $m'c_0$ und liegen daher die Punkte m, m', S, c_0 in einem Kreise, der in der Grenze in m berührt und also die Normale mc_0 zum Durchmesser hat. Daher bildet der Radiusvector Sc_0 der Evolute mit deren Tangente gleichfalls den Winkel ψ und ist senkrecht zum Radiusvector Sm der Spirale (m). Daher ist die Evolute selbst eine logarithmische Spirale und stehen ihre Radienvectoren vom gemeinsamen Pole S ausgehend senkrecht auf den Radienvectoren der ursprünglichen Spirale Die beiden Normalen mc_0, $m'c'_0$ der Spirale m bestimmen das Element der Evolute und sind Tangenten an diese. Die Normalen c_0c_{00}, $c'_0c'_{00}$ dieser Evolute bestimmen den Punkt c_{00} der zweiten Evolute und bilden denselben Winkel mit einander, wie die Normalen in m und m'. Der Radiusvector Sc_{00} der zweiten Evolute steht daher auf dem Radiusvector Sc_0 der ersten senkrecht, d. h. es liegen m, S, c_{00} in gerader Linie. Es ist mc_0 der Krümmungshalbmesser ϱ_0 der ersten und c_0c_{00} der Krümmungshalbmesser der zweiten Evolute und daher $cotg\,\psi = \frac{\varrho_{00}}{\varrho_0}$. Sind daher die Punkte m, c_0, c_{00} der ursprünglichen Spirale und ihrer ersten und zweiten Evolute bekannt, so kann der Pol S und die Neigung ψ der Tangente gegen den Radiusvector des Pols gefunden werden. Ein Perpendikel c_0S vom Evolutenpunkt c_0 auf die Linie mc_{00} gefällt, welche den Punkt m der Spirale mit dem entsprechenden Punkte ihrer zweiten Evolute verbindet, liefert der Pol S und das Verhältniss $\varrho_{00} : \varrho_0$ der Krümmungshalbmesser der zweiten und ersten Evolute giebt die Cotangente der Neigung ψ.

3. Die Verhältnisse der drei Radien ϱ, r, R sind constant, weil der Winkel H constant ist, den die Tangente der Curve mit der rectificirenden Geraden bildet. Man hat

$$\frac{r}{\varrho} = tg\,H, \quad \frac{R}{\varrho} = sin\,H, \quad \frac{R}{r} = cos\,H.$$

Ebenso sind die Verhältnisse des Contingenz-, Schmiegungs- und Winkels der ganzen Krümmung constant, nämlich

$$\frac{d\tau}{dk} = sin\,H, \quad \frac{d\sigma}{dk} = cos\,H, \quad \frac{d\tau}{d\sigma} = tg\,H.$$

dk ist zugleich der Winkel zweier Krümmungshalbmesser oder der Contingenzwinkel des Orthogonalschnitts der rectificirenden Fläche.

Die Bogenelemente ds der Loxodrome und ds_0 des Orthogonalschnitts haben das Verhältniss

$$\frac{ds}{ds_0} = \frac{1}{\sin H}$$

und ist das Verhältniss der Krümmungshalbmesser ϱ und ϱ_0 der Loxodrome und des Orthogonalschnitts

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{ds : d\tau}{ds_0 : dk} = \frac{1}{\sin^2 H}$$

und daher:

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\sin^2 H}, \quad r = \frac{\varrho_0}{\sin H \cos H}, \quad R = \frac{\varrho_0}{\cos H}.$$

4. Da die Linie kürzesten Abstandes zweier aufeinanderfolgender Hauptnormalen durch den Evolutenpunkt des Orthogonalschnitts geht, so ist $u = \varrho_0$ und der kürzeste Abstand dn der Hauptnormalen $dn = ds \cos H = ds_0 \operatorname{cotg} H$ und daher der Parameter der Hauptnormalen

$$p = \frac{dn}{dk} = \frac{ds_0}{dk} \operatorname{cotg} H = \varrho_0 \operatorname{cotg} H.$$

Ferner ist die Tangente der Neigung der Strictionslinie der Fläche der Hauptnormalen gegen die Linie ihres kürzesten Abstandes

$$\frac{d\varrho_0}{ds \cos H} = \frac{d\varrho_0}{ds_0} \operatorname{tg} H = \frac{d\varrho_0 : dk}{ds_0 : dk} \operatorname{tg} H = \frac{\varrho_{00}}{\varrho_0} \operatorname{tg} H = \operatorname{cotg} \psi \operatorname{tg} H,$$

wenn wie oben $\varrho_{00} = d\varrho_0 : dk$ den Krümmungshalbmesser der Evolute bezeichnet. Da dieser Werth constant ist, so bildet die Strictionslinie auf dem Cylinder der Linien kürzesten Abstandes eine Loxodrome.

5. Der Neigungswinkel μ der Curve der Krümmungsmittelpunkte gegen die Krümmungsaxe genügt der Gleichung:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{d\varrho}{\varrho\, d\sigma} = \frac{d\varrho_0}{\sin^2 H} : \frac{\varrho_0}{\sin^2 H} : dk \cos H = \frac{d\varrho_0}{dk} : \varrho_0 \cos H = \frac{\varrho_{00}}{\varrho_0 \cos H} = \frac{\operatorname{cotg} \psi}{\cos H}$$

d. h. es ist

$$\cos H = \operatorname{cotg} \psi \operatorname{cotg} \mu.$$

Der Winkel μ wird gebildet von der Tangente der Curve der Krümmungsmittelpunkte und der Krümmungsaxe; er ist aber gleich dem Winkel, welchen der Radius der Schmiegungskugel mit der Hauptnormalen bildet. Der Radius der Schmiegungskugel und die Hauptnormale sind aber senkrecht zur Tangentenebene der Schmiegungskugel und zur rectificirenden Ebene. Daher bilden die Tangentenebene der Schmiegungskugel und die rectificirende Ebene gleichfalls mit einander den Winkel μ und zwar an der Tangente der Loxodrome, welche ihre Durchschnittslinie ist. Die rectificirende Ebene bildet mit der Meridianebene des Kegels, auf welchem die Loxo-

IX. Capitel.

Die Fläche der Binormalen und die Fläche der Ebenen der ganzen Krümmung.

§ 1. Die Curve als Strictionslinie der Binormalenfläche. Nach Cap. I, § 9 erzeugen die Binormalen einer Curve (M) eine windschiefe Fläche, auf welcher die Curve selbst liegt und den Durchschnitt derselben mit der Fläche der Hauptnormalen und der rectificirenden Fläche darstellt. Die Curve schneidet die Binormalen unter rechten Winkeln und da zwei aufeinanderfolgende Binormalen auf den zugehörigen Schmiegungsebenen senkrecht stehen und diese sich in der Tangente der Curve schneiden, so stehen sie auch beide auf dieser senkrecht. Es ist daher die Tangente der Curve (M) die Linie kürzesten Abstandes zweier aufeinanderfolgenden Binormalen. Da dies von jeder Tangente gilt und diese sich in den Punkten der Curve schneiden, so folgt, dass die Curve (M) die Strictionslinie der Fläche ihrer Binormalen ist und dass die Fläche der Binormalen stets eine orthogonale Striction hat. Umgekehrt ist jede windschiefe Fläche mit orthogonaler Strictionslinie die Fläche der Binormalen dieser Curve. Denn jede Erzeugungslinie steht senkrecht auf der Linie ihres kürzesten Abstandes von der vorhergehenden und gleichzeitig senkrecht auf der Linie ihres kürzesten Abstandes von der folgenden Erzeugungslinie. Daher steht sie senkrecht auf beiden, also auch auf der Ebene beider. Da diese Linien aber wegen der Rechtwinkligkeit der Striction Tangenten der Strictionslinie sind, so ist ihre Ebene die Schmiegungsebene dieser Curve und folglich die Erzeugungslinie der Fläche im Punkte der Strictionslinie senkrecht auf deren Schmiegungsebene, d. h. die Binormale.

§ 2. Beziehungen der Binormalenfläche zur Fläche der Krümmungsaxen und zur rectificirenden Fläche. Die Binormalen einer Curve sind parallel den Krümmungsaxen derselben und die Normalebenen sind senkrecht zu den Linien kürzesten Abstandes der Binormalen. Daher sind die Normalebenen Tangentenebenen an die Fläche der Binormalen in unendlich fernen Punkten, d. h. Asymptotenebenen und folglich sind die Fläche der Krüm-

mungsaxen und die Fläche der Binormalen Asymptotenflächen von einander. (Vgl. Cap. VII, § 9.)

Die rectificirenden Ebenen der Curve sind Tangentenebenen der Fläche in den Punkten der Curve, daher ist die rectificirende Fläche der Fläche der Binormalen längs der Curve umschrieben.

§ 3. Specielle Fälle. Ist die Curve eben, so geht die Fläche der Binormalen in einen Cylinder über, welcher mit dem rectificirenden Cylinder zusammenfällt; ist die Curve sphärisch, so sind die Binormalen alle parallel den Erzeugungslinien eines Kegels.

§ 4. Nach Cap. VI, § 10 erzeugt die Ebene der ganzen Krümmung eine abwickelbare Fläche, deren Erzeugungslinien den Hauptnormalen parallel laufen und die rectificirenden Ebenen in den Punkten Q (Fig. 28) schneiden im Abstande $MQ = P \cos H = \frac{PR}{r}$. Die Ebenen der ganzen Krümmung sind senkrecht zu den Linien des kürzesten Abstandes zweier aufeinanderfolgenden Hauptnormalen und berühren die Fläche der Hauptnormalen im Unendlichen, sie sind also Asymptotenebenen dieser Fläche. Daher sind die abwickelbare Fläche der Ebenen der ganzen Krümmung und die Fläche der Hauptnormalen Asymptotenflächen zu einander.

X. Capitel.

Die Schmiegungshelix und die conische Schmiegungsloxodrome.

§ 1. Cylinderloxodrome. Eine Curve, welche gegen die Linien schwächster oder stärkster Krümmung einer Fläche unter constantem Winkel geneigt ist, heisst eine Loxodrome der Fläche. Ist die Fläche eine Cylinderfläche, deren Erzeugungslinien das System der Linien schwächster Krümmung bilden, so wird sie auch eine Schraubenlinie, Schneckenlinie oder eine Helix genannt. Den vorhergehenden Capiteln zufolge haben die Helixe, welche auf beliebigen Cylinderflächen liegen, folgende Eigenschaften:

1. Die Cylinderfläche ist rectificirende Fläche der Helix, die Ebenen der ganzen Krümmung sind sämmtlich untereinander und die Hauptnormalen ihnen parallel; die Hauptnormalen sind Normalen des Cylinders.

XI. Capitel.

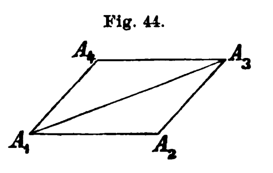
Geometrie der Bewegung der Curven doppelter Krümmung.

§ 1. Das Dreikant der Tangente, Haupt- und Binormalen. Die Normalebene, Schmiegungsebene und rectificirende Ebene mit ihren Durchschnittslinien, der Tangente, Hauptnormalen und Binormalen bilden ein dreifach rechtwinkliges Dreikant von bestimmter Lage für jeden Punkt der Curve. Von Punkt zu Punkt ändert es seine Lage; man kann es daher beweglich denken und sich die Frage vorlegen, wie dasselbe aus einer einem Punkte M der Curve entsprechenden Lage in die unmittelbar folgende, dem Punkte M' entsprechende Lage gelangen könne. Zwei solche Lagen des Dreikants sind zwei congruente räumliche Punktsysteme oder gehören solchen an und jedem Punkt des einen ist ein Punkt des andern homolog. So entspricht dem Punkte M der Punkt M', der Tangente in M die Tangente in M', der Hauptnormalen die Hauptnormale, der Binormalen die Binormale u. s. w. Nach einem allgemeinen Satze der Theorie solcher Systeme existirt immer eine Doppellinie beider, d. h. es giebt eine Gerade, in welcher eine Gerade des ersten Systems mit der ihr homologen Geraden des zweiten Systems zusammenfällt. Diese beiden zusammenfallenden homologen Geraden sind die Träger von homologen Punktreihen, welche aber im Allgemeinen nicht Punkt für Punkt coincidiren, sondern erst auf einander verschoben werden müssten, um zur Coincidenz zu gelangen. Hieraus folgt, dass das Dreikant aus der ersten in die zweite Lage übergeführt werden kann durch eine Rotation um die Doppellinie in Verbindung mit einer Verschiebung (Translation) parallel derselben oder also durch eine Windung. Um die Axe dieser Windung und die Amplitude der Rotation um dieselbe, sowie die Parallelverschiebung einfach für den hier vorliegenden Fall zu finden, genügen einige wenige Sätze der Geometrie der Bewegung, die wir zunächst entwickeln wollen.

§ 2. Aequivalenz der Translationen. Die Aufeinanderfolge von zwei Parallelverschiebungen (Translationen) eines Systems Σ aus einer ersten Lage Σ_1 in eine zweite Σ_2 und sodann in eine dritte Σ_3 ist äquivalent einer Translation direct aus der Lage Σ_1 in die Lage Σ_3. Denn sind A_1, A_2, A_3 drei homologe Lagen

eines Systempunktes (Fig. 44), so bleibt das System Σ während der Translation $A_1 A_2$ sich parallel, ebenso während der Translation $A_2 A_3$; daher sind Σ_1 und Σ_3 in Parallellage und kann folglich Σ aus der Lage Σ_1 nach Σ_3 durch Translation von der Grösse $A_1 A_3$ gelangen. Man sieht leicht, dass die Ordnung der Aufeinanderfolge der Translationen vertauschbar ist, sowie, dass beide Translationen auch zugleich stattfinden können. Die Translation $A_1 A_3$, welche den beiden $A_1 A_2$ und $A_2 A_3$ zusammen äquivalent ist, heisst die Resultante dieser, sie sind deren Componenten und ist die Resultante die Diagonale eines Parallelogrammes $A_1 A_2 A_3 A_4$, welches mit den Componenten als Seiten construirt werden kann. — Man kann jede Translation eines Systems in zwei Componenten auf verschiedene Arten zerlegen, welche ihr zusammen äquivalent sind. Auch ist klar, dass die Zusammensetzung von beliebig vielen Translationen in eine resultirende Translation in beliebiger Ordnung und mit Hülfe der Schlusslinie eines aus den Componenten gebildeten Polygonalzuges erfolgen kann.

Fig. 44.



§ 3. Aequivalenz unendlich kleiner Rotationen. Zwei unendlich kleine Rotationen von den Amplituden (Rotationswinkeln) $d\vartheta$, $d\vartheta'$ um zwei sich in einem Punkte O schneidende Axen a, b (Fig. 45) sind zusammen äquivalent einer einzigen Rotation $d\Theta$ um eine durch den Schnittpunkt O hindurchgehende, in die Ebene (ab) fallende Axe c. Diese Axe theilt den Winkel ab in dem Sinusverhältniss

Fig. 45.

$$\frac{\sin ac}{d\vartheta'} = \frac{\sin cb}{d\vartheta} = \frac{\sin ab}{d\Theta}$$

und die resultirende Amplitude $d\Theta$ der Axe c ist die Diagonale eines Parallelogramms, welches die auf den Axen a, b von O aus aufgetragenen Amplituden $d\vartheta$, $d\vartheta'$ zu Seiten hat, sodass

$$d\Theta^2 = d\vartheta^2 + d\vartheta'^2 + 2\, d\vartheta\, d\vartheta' \cos(ab)$$

ist. Es ist nämlich leicht zu zeigen, dass es in der Ebene der Axen eine Gerade giebt, deren Punkte durch die beiden Rotationen nach entgegengesetzten Seiten der Ebene um gleiche unendlich kleine Strecken geschleudert werden und folglich in Ruhe bleiben. Denn

die Axe a theilt die Ebene ab in zwei Felder, deren Punkte in Folge der Rotation um a nach entgegengesetzten Seiten dieser Ebene geschleudert werden. Ebenso zerlegt die Axe b die Ebene ab in zwei Felder von entgegengesetzten Bewegungen. Beide Axen zusammen theilen daher die Ebene ab in zwei Paar Scheitelräume, von denen die Punkte des einen entgegengesetzte Bewegungen annehmen, während die des andern in demselben Sinne geschleudert werden. Blos in dem ersten Paare können daher sich Punkte finden, deren entgegengesetzte Bewegungen sich tilgen, die mithin in Ruhe bleiben. Ist γ ein Punkt dieses Scheitelpaares und fällt man von ihm die Perpendikel γP und γQ auf die Axen a, b, so sind die beiden entgegengesetzten Schleuderungswege, die derselbe beschreiben würde, $\gamma P \cdot d\vartheta$ und $\gamma Q \cdot d\vartheta'$; er bleibt also in Ruhe, wenn $\gamma P \cdot d\vartheta = \gamma Q \cdot d\vartheta'$, d. h. wenn seine Abstände γP, γQ von den Axen a, b der Bedingung genügen

$$\frac{\gamma P}{d\vartheta'} = \frac{\gamma Q}{d\vartheta}.$$

Verbindet man γ mit O durch die Gerade c, so werden $\gamma P = O\gamma \cdot \sin ac$, $\gamma Q = O\gamma \cdot \sin ab$ und geht die Proportion über in

$$\frac{\sin ac}{d\vartheta'} = \frac{\sin cb}{d\vartheta}.$$

Da der Punkt O in Ruhe bleibt, so bleiben alle Punkte von c in Ruhe, wenn einer von ihnen, γ, in Ruhe bleibt. Die Axe c theilt den Winkel ab in dem angegebenen Verhältniss und existirt daher immer. Sie ist auch die Diagonale des Parallelogramms, welches mit den auf a, b aufgetragenen Längen $d\vartheta$, $d\vartheta'$ construirt werden kann. Um die Amplitude $d\Theta$ der resultirenden Rotation um die Axe c zu finden, bemerke man, dass der Punkt P seine Bewegung blos der Amplitude $d\vartheta'$ um die Axe b verdankt, da er auf der Axe a liegt. Seine Schleuderung um b wäre das Product seines Abstandes $PO \cdot \sin ab$ von der Axe b und der Amplitude $d\vartheta'$ um diese, mithin $d\vartheta' \cdot PO \cdot \sin ab$. Diese Schleuderung, durch die resultirende Amplitude $d\Theta$ um c hervorgebracht, wäre $d\Theta \cdot PO \cdot \sin ac$ und die Gleichsetzung beider Werthe liefert

$$d\Theta \cdot \sin(ac) = d\vartheta' \cdot \sin ab.$$

Ebenso verdankt der Punkt Q seine Schleuderung blos der Rotation $d\vartheta$ um a und hat man in ähnlicher Weise

$$d\Theta \cdot \sin cb = d\vartheta \cdot \sin ab.$$

Aus beiden Relationen folgt in Verbindung mit der obigen

$$\frac{\sin ac}{d\vartheta'} = \frac{\sin cb}{d\vartheta} = \frac{\sin ab}{d\Theta}.$$

Zieht man noch $\gamma\alpha$ und $\gamma\beta$ parallel der Axen b, a, so wird

$$\frac{\sin ac}{O\beta} = \frac{\sin ab}{O\alpha} = \frac{\sin ab}{O\gamma},$$

mithin

$$\frac{d\vartheta'}{O\beta} = \frac{d\vartheta}{O\alpha} = \frac{d\Theta}{O\gamma}$$

und da

$$\overline{O\gamma}^2 = \overline{O\alpha}^2 + \overline{O\beta}^2 + 2\,O\alpha \cdot O\beta \cdot \cos ab$$

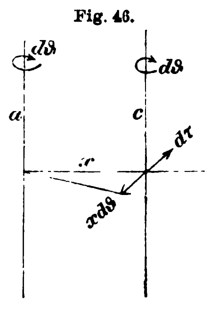
ist, folgt

$$d\Theta^2 = d\vartheta^2 + d\vartheta'^2 + 2\,d\vartheta\, d\vartheta' \cos ab.$$

Man sieht leicht, dass die beiden unendlich kleinen Rotationen in beliebiger Folge oder auch zusammen eintreten können.

§ 4. **Unendlich kleine Rotation und Translation senkrecht zur Axe derselben.** Rückt die Axe b ins Unendliche, so geht die Rotation um sie in eine Translation $d\tau$ senkrecht zu der Ebene, welche durch a parallel zu der ins Unendliche rückenden Axe gelegt werden kann und ist mithin auch senkrecht zur Axe a. Vermöge dieser Translation erleiden die Punkte der Ebene alle gleiche Schleuderungen $d\tau$ in demselben Sinne senkrecht zur Ebene (Fig. 46); vermöge der Rotation $d\vartheta$ um a haben die beiden Felder derselben, in welche sie durch die Axe a zerlegt wird, entgegengesetzte Schleuderungen und giebt es daher ein Feld, in welchem sich die Schleuderung $d\tau$ und die von der Rotation $d\vartheta$ herrührende Schleuderung, welche im Abstande x von der Axe a gleich $x \cdot d\vartheta$ ist, tilgen können. Dies tritt ein für alle Punkte einer zu a parallelen Axe c, deren Abstand x sich aus der Gleichung $x d\vartheta = d\tau$ ergiebt, nämlich $x = \frac{d\tau}{d\vartheta}$. Man erkennt hieraus unmittelbar, dass eine unendlich kleine Rotation von der Amplitude $d\vartheta$ um eine Axe a und eine zu ihr senkrechte Translation $d\tau$ zusammen äquivalent sind einer blossen Rotation um eine zu a parallele Axe c von derselben Amplitude $d\vartheta$, welche sich in der durch a senkrecht zur Translationsrichtung zu legenden Ebene im Abstande $\frac{d\tau}{d\vartheta}$ findet und zwar auf der Seite von a, auf welcher die Punkte der Ebene in

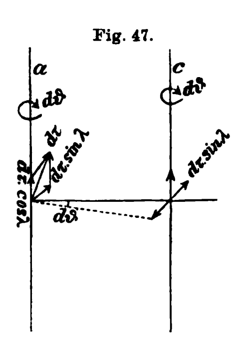
Fig. 46.



Folge beider Bewegungen, der Rotation und der Translation entgegengesetzte Schleuderungen erleiden. Die Folge der Rotation und Translation ist vertauschbar; auch können beide zugleich erfolgen.

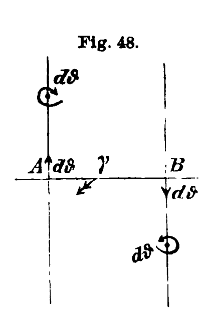
§ 5. Eine unendlich kleine Rotation $d\vartheta$ um eine Axe a und eine Translation $d\tau$, welche unter einem Winkel λ gegen die Axe a geneigt ist (Fig. 47), sind zusammen äquivalent einer Windungsbewegung um eine zu a parallele Axe. Denn man zerlege die Translation $d\tau$ in zwei Componenten, von denen die eine, $d\tau \cos\lambda$, parallel, die andere, $d\tau \sin\lambda$, senkrecht zur Axe a ist. Nun lege man durch a eine Ebene senkrecht zur Richtung von $d\tau \sin\lambda$, so wird die Rotation $d\vartheta$ um a in Verbindung mit der zu a senkrechten Translation $d\tau \sin\lambda$ äquivalent sein einer blossen Rotation um eine zu a parallele Axe c in dieser Ebene im Abstande $\frac{d\tau}{d\vartheta} \sin\lambda$ und zwar auf derjenigen Seite von a gelegen, auf welcher die Punkte vermöge $d\vartheta$ und $d\tau \sin\lambda$ entgegengesetzte Bewegungen annehmen. Diese Rotation $d\vartheta$ um c verbindet sich mit der noch übrigen, zu c parallelen Translationscomponente $d\tau \cos\lambda$ zu der unendlich kleinen Windungsbewegung.

Fig. 47.



§ 6. Werden die beiden Axen a und b des § 3 einander parallel und ihre Amplituden $d\vartheta$ und $d\vartheta'$ einander gleich und dem Sinne nach entgegengesetzt, so ist die resultirende Bewegung des Systems eine unendlich kleine Translation, senkrecht zu der Ebene der beiden Axen. Denn ist γ (Fig. 48) irgend ein Punkt der Axenebene und $A\gamma B$ die durch ihn in dieser Ebene gelegte Senkrechte zu beiden Axen, so erlangt derselbe durch die Rotation $d\vartheta$ um a eine unendlich kleine Schleuderung $A\gamma \cdot d\vartheta$ senkrecht zur Axenebene und durch die entgegengesetzte Rotation $-d\vartheta$ um b eine Schleuderung $\gamma B \cdot d\vartheta$ in gleichem Sinne mit jener. Beide geben zusammen die resultirende Schleuderung $(A\gamma + \gamma B)\, d\vartheta = AB \cdot d\vartheta$, wo auch immer der Punkte γ in der Ebene der Axen liegen mag. Alle Punkte der Ebene ab und

Fig. 48.

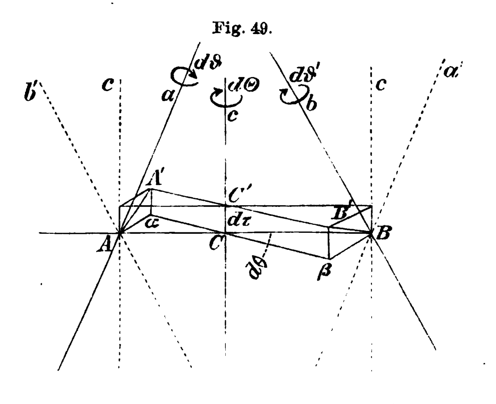


mithin auch alle Punkte des ganzen beweglichen Systems erlangen diese von der Lage der Punkte unabhängige gemeinschaftliche Schleuderung gleich dem Producte aus der Amplitude $d\vartheta$ und dem Abstande AB der Axen senkrecht zur Ebene dieser Axen. Den Sinn dieser Translation erkennt man leicht, indem man die entgegengesetzt gleichen Amplituden $d\vartheta$ und $-d\vartheta$ auf den Axen aufträgt und die Stellung der Pfeilspitzen derselben mit dem Sinne der Uhrzeigerbewegung vergleicht. Die Translation erfolgt nach derjenigen Seite der Axenebene ab, von welcher aus die Stellung der Pfeilspitzen mit der Uhrzeigerbewegung harmonirt. Die Verbindung der beiden entgegengesetzt gleichen Amplituden $d\vartheta$ um parallele Axen heisst ein Rotationspaar und $AB \cdot d\vartheta$ sein Moment. Ein solches Paar ist stets äquivalent einer zur Axenebene senkrechten Translation, gleich dem Momente des Paares. Alle Rotationspaare von gleichem Momente in derselben Ebene liegend und von demselben Sinne (harmonirend oder disharmonirend mit der Uhrzeigerbewegung) sind einander äquivalent.

§ 7. Zwei unendlich kleine Rotationen von den Amplituden $d\vartheta$, $d\vartheta'$ um zwei gekreuzte Axen a, b sind äquivalent einer unendlich kleinen Windung. Die unendlich kleine Amplitude $d\Theta$ und die unendlich kleine Translation $d\tau$ dieser Windung wird, wie folgt gefunden.

Es sei AB (Fig. 49) der kürzeste Abstand der Axen a, b; durch A lege man eine Axe b' parallel b und ertheile dem System um sie zwei entgegengesetzt gleiche Rotationen von den Amplituden $d\vartheta'$ und $-d\vartheta'$. Dieselben können, da sie sich tilgen, dem System ohne Störung seiner Bewegung ertheilt werden. Die Amplituden $d\vartheta$ um a und $d\vartheta'$ um b' sind aber äquivalent einer Amplitude $d\Theta$ um eine Axe c, welche durch A hindurchgeht und in die Ebene ab' fällt. Sie kann nach § 3 gefunden werden. Die noch übrigen Rotationen $d\vartheta'$ um b und $-d\vartheta'$ um b'

Fig. 49.



bilden aber ein Paar, welches einer Translation $AA' = AB \cdot d\vartheta'$ äquivalent und senkrecht zu der Ebene bb' ist. Der Sinn dieser Translation weist nach der Seite der Ebene bb' hin, von welcher aus die Stellung der Pfeilspitzen der auf b, b' aufgetragenen Amplituden $d\vartheta$ und $-d\vartheta'$ mit dem Uhrzeigersinn harmonirt. Diese Translation AA' spalten wir in eine Componente $\alpha A'$ parallel zur Axe c und eine $A\alpha$ senkrecht zu c. Die letztere ist in Verbindung mit der resultirenden Amplitude $d\Theta$ um c äquivalent einer Amplitude $d\Theta$ um die parallele Axe c im Abstand $A\alpha : d\Theta$. Diese Amplitude $d\Theta$ um c verbindet sich mit der noch übrigen, zu c parallelen Translation $\alpha A'$, zu der Windung um die Axe c. Die Axe c schneidet den kürzesten Abstand AB in einem gewissen Punkte C, dessen Lage noch zu bestimmen ist. Wir können die Elemente der resultirenden Windung sehr einfach mit Hülfe der Bewegungen finden, welche die Punkte der Axen a und b erlangen, und sie durch diese Elemente darstellen.

Die Punkte der Axe b verdanken ihre Bewegung allein der Rotation $d\vartheta$ um die Axe a. So beschreibt in Folge dieser Rotation der Fusspunkt B des kürzesten Abstandes AB ein unendlich kleines Kreisbogenelement $BB' = AB \cdot d\vartheta$, dessen Ebene senkrecht ist zur Axe a und welches als eine unendlich kleine, die Axe a rechtwinklig kreuzende Strecke anzusehen ist. Dasselbe zerfällt in die beiden Componenten parallel und senkrecht zur Axe c der gesuchten Windung:

$$\beta B' = BB' \cdot \sin ac = AB\, d\vartheta \cdot \sin ac$$

und

$$B\beta = BB' \cdot \cos ac = AB \cdot d\vartheta \cdot \cos ac.$$

Ebenso verdankt der Fusspunkt A des kürzesten Abstandes seine ganze Bewegung der Rotation $d\vartheta'$ um b. Diese ist $AA' = BA \cdot d\vartheta'$ und zerfällt ebenso in die Componenten:

$$\alpha A' = BA \cdot d\vartheta' \cdot \sin cb \quad \text{und} \quad A\alpha = BA \cdot d\vartheta' \cdot \cos cb$$

parallel und senkrecht zur Axe c. Da durch die Windung um c alle Punkte des Systems um gleiche Strecken parallel zur Windungsaxe verschoben werden, so müssen $\alpha A' = \beta B' = d\tau$, nämlich gleich der Translation der Windung sein. Da ferner dieselben vermöge der Amplitude $d\Theta$ der Windung senkrecht zur Axe c unendlich kleine Wege proportional ihren Abständen von dieser Axe beschreiben, so sind $B\beta = CB \cdot d\Theta$ und $\alpha A = AC \cdot d\Theta$. Daher hat man die vier Gleichungen:

$$AB \cdot d\vartheta \cdot \sin ac = d\tau, \quad AB \cdot d\vartheta \cdot \cos ac = CB \cdot d\Theta,$$

$$AB \cdot d\vartheta' \cdot \sin cb = d\tau, \quad AB \cdot d\vartheta' \cdot \cos cb = AC \cdot d\Theta.$$

Aus ihnen folgt

$$\frac{d\tau}{d\Theta} = CB \cdot tg\, ac = AC \cdot tg\, cb$$

und mithin

$$\frac{AC}{CB} = \frac{tg\, ac}{tg\, cb},$$

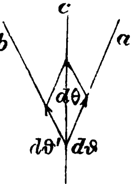
d. h. die Windungsaxe c theilt den kürzesten Abstand der Axen a, b im Verhältniss der Tangenten der Winkel, welche sie mit den Axen a und b bildet.

Weiter folgt

$$\frac{d\vartheta}{\sin cb} = \frac{d\vartheta'}{\sin ac},$$

was ausdrückt, dass die Windungsaxe c die Richtung der Diagonalen des Parallelogramms (Fig. 49 a) hat, dessen Seiten die auf den Axen a, b aufgetragenen Amplituden $d\vartheta$, $d\vartheta'$ sind. Endlich ergiebt sich noch

Fig 49 a.



$$AB(d\vartheta \cdot \cos ac + d\vartheta' \cdot \cos cb) = (AC + CB)\, d\Theta$$

oder

$$d\vartheta \cdot \cos ac + d\vartheta' \cdot \cos cb = d\Theta,$$

d. h. die Länge der Diagonale des genannten Parallelogramms giebt die Grösse der Amplitude $d\Theta$ der resultirenden Windung an. Daher ist auch

$$d\Theta^2 = d\vartheta^2 + d\vartheta'^2 + 2\, d\vartheta\, d\vartheta' \cos ab \quad \text{und} \quad \frac{d\vartheta}{\sin cb} = \frac{d\vartheta'}{\sin ac} = \frac{d\Theta}{\sin ab}.$$

Hierzu findet sich noch

$$d\tau = AB \cdot \sin ab \cdot \frac{d\vartheta\, d\vartheta'}{d\Theta}.$$

Das Theilungsverhältniss des kürzesten Abstandes AB durch die Windungsaxe kann noch auf eine etwas andere Art dargestellt werden. Die Projectionen des aus $d\vartheta$, $d\vartheta'$, $d\Theta$ gebildeten Dreiecks auf seine Seiten geben nämlich

$$d\Theta \cdot \cos cb = d\vartheta' + d\vartheta \cdot \cos ab,$$

$$d\Theta \cdot \cos ac = d\vartheta' \cos ab + d\vartheta,$$

wodurch

$$\frac{AC}{CB} = \frac{d\vartheta'}{d\vartheta} \cdot \frac{\cos cb}{\cos ac} = \frac{d\vartheta'}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta' + d\vartheta \cos ab}{d\vartheta' \cos ab + d\vartheta}$$

wird.

Für den speciellen Fall, dass die Axen a, b parallel sind, wird $\sin ab = 0$, also $d\tau = 0$, $d\Theta = d\vartheta + d\vartheta'$, $\frac{AC}{CB} = \frac{d\vartheta'}{d\vartheta}$.

Im Falle, dass der Winkel der Axen gleich $\frac{1}{2}\pi$, hat man
$$\frac{AC}{CB} = \left(\frac{d\vartheta'}{d\vartheta}\right)^2, \quad d\tau = AB \cdot \frac{d\vartheta\, d\vartheta'}{\sqrt{d\vartheta^2 + d\vartheta'^2}}, \quad d\Theta^2 = d\vartheta^2 + d\vartheta'^2.$$

Für $ab = \pi$ erhält man:
$$\frac{AC}{CB} = -\frac{d\vartheta'}{d\vartheta}, \quad d\tau = 0, \quad d\Theta = d\vartheta - d\vartheta'.$$

§ 8. Conjugirte Axen. So wie zwei unendlich kleine Rotationen um gekreuzte Axen a, b zu einer Windung vereinigt werden können, so kann umgekehrt eine Windung in zwei Rotationen um solche Axen aufgelöst werden; dabei kann die eine der beiden Axen noch willkürlich anderen Bedingungen gemäss gewählt werden. Zwei Axen, um welche zwei unendlich kleine Amplituden einer gegebenen unendlich kleinen Windung zusammen äquivalent sind, heissen conjugirte Axen. Ihre interessanten Eigenschaften zu entwickeln ist hier nicht der Ort, vielmehr gehört dieser Gegenstand der Geometrie der Bewegung als besonders wichtig an.*

§ 9. Elementarbewegung des Dreikants der Tangente, Hauptnormale und Binormale. Das dreifach rechtwinklige Dreikant der Tangente t, Hauptnormale n und Binormale b kann durch drei einfache Bewegungen, eine Translation und zwei Rotationen aus einer ersten, dem Punkte M entsprechenden Lage (tnb) in eine unmittelbar folgende, dem Punkte M' entsprechende Lage $(t'n'b')$ übergeführt werden. Diese drei Bewegungen können in beliebiger Ordnung oder auch gleichzeitig erfolgen. Ertheilt man dem Dreikant zunächst eine Translation von der Grösse, Richtung und dem Sinne des Bogenelementes $MM' = ds$, so verschieben sich die Tangente und die Schmiegungsebene um diese Strecke in sich selbst und rücken die Haupt- und Binormale um diese Strecke parallel mit sich fort. Erleidet hierauf das System eine Rotation von der Amplitude gleich dem Contingenzwinkel $d\tau$ in dem Sinne dieses um die Binormale in der neuen Lage, so dreht sich die Schmiegungsebene in sich selbst um den Punkt M', gelangt die Tangente in die Lage t' und

* Vgl. hierüber meine „Theorie der Bewegung und der Kräfte". 2. Aufl. Leipzig, Teubner, 1879, Bd. I, Cap. V.

die Hauptnormale in die Lage der Normale des Punktes M', welche in die Schmiegungsebene des Punktes M fällt und die Projection von b' auf diese Schmiegungsebene darstellt. Die Hauptnormale schneidet sich in dieser Lage mit ihrer ersten Lage n im Krümmungsmittelpunkte C des Punktes M. Lässt man hierauf das System um die Tangente t' um den Schmiegungswinkel $d\sigma$ in dessen Sinne rotiren, so hebt sich die Schmiegungsebene aus ihrer ersten Lage heraus und gehen die Hauptnormale und die Binormale in ihre definitiven Lagen n' und b' über. Der Uebergang des Dreikants (tnb) in seine zweite Lage $(t'n'b')$ ist vollendet. Man erkennt unmittelbar, dass diese drei Bewegungen in jeder ihrer sechs möglichen Folgen oder auch zugleich eintreten können. Dieselben können aber auch paarweise zusammengesetzt werden. So ist die Translation MM' in Verbindung mit der Rotation $d\tau$ um die zu ihr senkrechte Binormale äquivalent einer blossen Rotation $d\tau$ um eine zur Hauptnormalen b parallele Axe k im Abstande $\frac{ds}{d\tau}$ von b und liegt die Axe k in der Normalebene des Punktes M auf der Seite von b, nach welcher die Rotation $d\tau$ erfolgt, d. h. auf der Seite des Krümmungsmittelpunktes C. Der Abstand der Axe k von b ist gleich dem Krümmungshalbmesser $\varrho = \frac{ds}{d\tau}$. Man ersieht hieraus, dass das Dreikant aus seiner ersten Lage (tnb) in die zweite $(t'n'b')$ übergehen kann durch eine Rotation von der Amplitude gleich dem Contingenzwinkel $d\tau$ um die Krümmungsaxe und eine zweite Rotation um die Tangente um den Schmiegungswinkel $d\sigma$, beide Rotationen in vertauschbarer Ordnung oder gleichzeitig um ihre Axen ausgeführt, übereinstimmend mit dem Sinne des Contingenz- und Schmiegungswinkels. Nach § 7 sind diese beiden Rotationen äquivalent einer Windung um eine zum kürzesten Abstande von t und k, nämlich zu MC senkrechte Axe. Wir werden diese Windung nachher eingehend behandeln und wollen sie die Elementarbewegung des Dreikants nennen. — Ebenso können die beiden Rotationen $d\tau$ um b und $d\sigma$ um t zu einer Rotation vereinigt werden. Nach § 3 liegt die resultirende Axe in der Ebene der beiden Axen b und t und geht durch deren Schnittpunkt M hindurch. Sie ist die Diagonale eines Parallelogramms, welches über den auf den Axen b und t als Längen aufzutragenden Amplituden $d\tau$ und $d\sigma$ construirt werden kann. Da b und t in die rectificirende Ebene fallen und zu einander senkrecht

sind, so ist dies Parallelogramm ein Rechteck und die resultirende Axe keine andere als die rectificirende Gerade, welche mit der Tangente den Winkel H bildet, für den $tg H = \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{ds}{d\sigma} : \frac{ds}{d\tau} = \frac{r}{\varrho}$ ist. Man erkennt daher hieraus, dass die drei Bewegungen des Dreikants zusammen auch äquivalent sind der Translation $MM' = ds$ in Verbindung mit einer Rotation um die rectificirende Gerade von M von der Amplitude, deren Quadrat $d\tau^2 + d\sigma^2$ ist, d. h. von der Amplitude gleich dem Winkel dk der ganzen Krümmung. Wir werden die Aequivalenz dieser beiden Bewegungen mit der vorhin erwähnten Windung nachweisen können. Denn nach § 5 ist die Rotation dk um die rectificirende Gerade in Verbindung mit der zu ihr unter dem Winkel H geneigten Translation einer Windung äquivalent um eine zur rectificirenden Geraden parallele Axe.

§ 10. Die Elementarwindung des Dreikants. Nach § 6 hat die Windungsaxe c die Richtung der Diagonale des Rechtecks, welches mit den auf der Binormalen und der Tangente aufgetragenen Längen $d\tau$ und $d\sigma$ construirt werden kann. Diese Richtung ist daher die der rectificirenden Geraden und gegen die Tangente unter dem Winkel H geneigt, wofür $tg H = \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{r}{\varrho}$ ist. Die Windungsaxe c theilt ferner den kürzesten Abstand MC in dem Verhältniss $\frac{ME}{EC} = \frac{tg\, tc}{tg\, ck} = \frac{d\tau}{d\sigma} : \frac{d\sigma}{d\tau} = \left(\frac{d\tau}{d\sigma}\right)^2 = \frac{r^2}{\varrho^2}$. Daher ist der Abstand ME zu finden aus $u : (\varrho - u) = \frac{r^2}{\varrho^2}$, d. h. mit Rücksicht auf $\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{R^2}$ als $u = \frac{R^2}{\varrho}$. Die Windungsaxe ist daher die Linie kürzesten Abstandes der Hauptnormalen der aufeinanderfolgenden Punkte M und M'. Das Quadrat der Amplitude der Windung ist $d\tau^2 + d\sigma^2 = dk^2$. Die Windungsamplitude ist daher gleich dem Winkel dk der ganzen Krümmung. Die Translation der Windung ist $\varrho \frac{d\tau\, d\sigma}{dk} = ds \cdot \frac{d\sigma}{dk} = ds \cdot \frac{R}{r} = ds \cos H$, d. h. gleich der Projection des Bogenelements auf die Richtung der rectificirenden Geraden.

Den Quotienten der Translation durch die Amplitude der Windung nennt man den Parameter p der Windung Es ist mithin $p = \frac{ds}{dk} \frac{R}{r} = \frac{R^2}{r}$. Diese Entwickelung liefert den Satz:

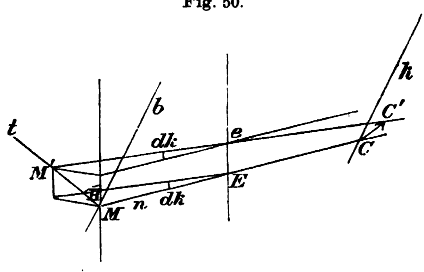
Das Dreikant der Tangente, Hauptnormale und Binormale kann durch eine Elementarwindung aus der einem

Punkte M der Curve entsprechenden Lage in die unmittelbar folgende Lage übergeführt werden, deren Axe die Linie des kürzesten Abstandes der beiden aufeinanderfolgenden Hauptnormalen, deren Translation die Projection $ds\cos H$ des Bogenelements auf diese Axenrichtung, deren Amplitude gleich dem Winkel dk der ganzen Krümmung und deren Parameter p die dritte Proportionale $p = \frac{R^2}{r}$ zum Radius der ganzen Krümmung und dem Schmiegungsradius ist.

Man erkennt unmittelbar, wie die übrigen Zusammensetzungen der drei Bewegungen des Dreikants zum gleichen Resultate führen. Fig. 50 dient zur Erläuterung.

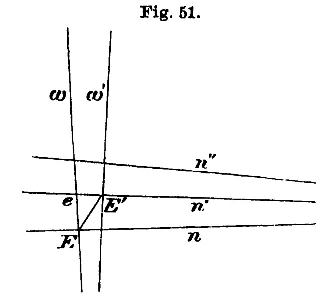
Die Axe der Windung ist die Axe der Schmiegungshelix. Die Tangente und die Krümmungsaxe sind conjugirte und zwar rechtwinklig conjugirte Axen der Elementarwindung.

Fig. 50.



§ 11. **Die Fläche der Windungsaxen.** Die aufeinanderfolgenden Windungsaxen bilden eine im Allgemeinen windschiefe Fläche, welche die Fläche der Hauptnormalen in deren Strictionslinie schneidet. Diese Curve ist zugleich auch die Strictionslinie der Fläche der Windungsaxen. Denn sind n, n', n'' drei aufeinanderfolgende Hauptnormalen und ω, ω' die beiden Windungsaxen (Fig. 51), welche das Dreikant aus der Lage (tnb) in die folgende Lage $(t'n'b')$ und aus dieser in die dritte $(t''n''b'')$ überführen, so steht ω senkrecht auf n und n' in den Punkten E, e und ω' senkrecht auf n' und n'' in E', e', mithin ist n' senkrecht zu ω, ω' in e, E' und ist mithin E' der Punkt der Strictionslinie von ω' auf n'. Die Fläche der Windungsaxen und die Fläche der Hauptnormalen berühren einander längs der Strictionslinie. Denn die Tangentenebene der Fläche der Hauptnormalen in E enthält die Hauptnormale n, die Windungsaxe ω und die Tangente EE' der Strictionslinie.

Fig. 51.



Der kürzeste Abstand zweier Windungsaxen ω, ω' ist $eE' = du$ und ihr Winkel ist dH, da sie zweien rectificirenden Geraden parallel sind. Der Parameter der Fläche der Windungsaxen längs der Erzeugungslinie ω ist daher:

$$p_1 = \frac{du}{dH} = \frac{d \cdot \frac{R^2}{\varrho}}{d \cdot arctg \frac{r}{\varrho}}.$$

Die Windungsaxe wechselt mit der Lage des Dreikants tnb. Denkt man sich das Dreikant continuirlich durch alle seine Lagen hindurchgeführt, so hat die Windungsaxe selbst eine ideelle Wechselbewegung. Diese ist selbst eine Windung; denn diese Axe verschiebt sich parallel mit sich selbst um die unendlich kleine Strecke du und rotirt zugleich um die Axe n', in welche diese Strecke hineinfällt.

Eine windschiefe Fläche kann auf zwei Arten in eine abwickelbare Fläche übergehen, einmal dadurch, dass der kürzeste Abstand zweier aufeinanderfolgenden Erzeugungslinien Null wird und ein andermal dadurch, dass der Winkel beider Erzeugungslinien verschwindet. Im vorliegenden Falle kann daher die Fläche der Windungsaxen abwickelbar werden, erstens, wenn $du = 0$ wird, d. h. wenn die Punkte E' mit den Punkten e zusammenfallen, oder also die Strictionslinie der Fläche der Hauptnormalen die Hauptnormalen rechtwinklig schneidet. Die Windungsaxen sind alsdann die Tangenten der Strictionslinie; zweitens aber auch, wenn $dH = 0$ wird, d. h. wenn die rectificirende Fläche eine Cylinderfläche und die Curve (M) auf ihr eine Helix ist. Treffen beide Fälle zusammen ein, so fallen alle Windungsaxen in eine Gerade zusammen und wird die Fläche der Hauptnormalen ein Helicoid.

In dem ersten Falle ist $d \cdot \frac{R^2}{\varrho} = 0$ d. h. $\frac{R^2}{\varrho} = const.$ Es ist aber nach Cap. VI, § 14 $\frac{R^2}{\varrho}$ der Krümmungshalbmesser des Normalschnitts der rectificirenden Fläche im Curvenpunkte M senkrecht zur rectificirenden Geraden. Die rectificirende Fläche hat in diesem Falle demnach die Eigenschaft, dass der Krümmungshalbmesser ihres Hauptnormalschnitts stärkster Krümmung constant ist.*

---

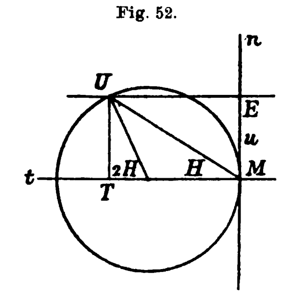
* Vgl. Cesaro, Théorème de cinématique. Nouvelles annales de mathématiques. 3ième Série, T. 3, p. 434—436 (1884).

§ 12. **Die Fläche der Windungsaxen im Dreikant.** Während das System des Dreikants sich längs der Curve hinbewegt, sodass seine drei Geraden t, n, b fortwährend mit der Tangente, Hauptnormalen und Binormalen zusammenfallen, fällt auch eine bestimmte Gerade desselben mit der Windungsaxe zusammen und bilden alle diese, den verschiedenen Lagen des Dreikants entsprechenden Geraden eine conoidische Fläche, welche die Axenfläche längs der Windungsaxe berührt, deren Natur sich auf folgende Weise untersuchen lässt. Die mit der Windungsaxe zusammenfallende Erzeugungslinie des Conoids schneidet die Gerade n im Abstande $u = \frac{R^2}{\varrho}$ von der Ecke des Dreikants und ihre Neigung H gegen t ist gegeben durch $tg\, H = \frac{r}{\varrho}$. Mit Hülfe der Lancret'schen Relation $\frac{1}{R^2} = \frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}$ ergiebt sich $u = \frac{\varrho r^2}{\varrho^2 + r^2}$ und zugleich wird $sin\, 2H = \frac{2\varrho r}{\varrho^2 + r^2}$. Hieraus folgt

$$u = \frac{1}{2} r\, sin\, 2H.$$

Während der Bewegung des Dreikants bildet die Erzeugungslinie des Conoids mit der Geraden t den veränderlichen Winkel H und schneidet die Gerade n im Abstande $u = ME$ (Fig. 52) von der Ecke gleich dem Producte aus dem halben Schmiegungsradius r und dem Sinus des doppelten Winkels H. Ein Kreis, welcher die Gerade n in M berührt und zum Durchmesser $MT = r$ hat, liefert mit Hülfe des Winkels $TMU = H$ den Abstand $u = PM = ME = \frac{1}{2} r\, sin\, 2H$.

Fig. 52.



Für die Curven constanten Schmiegungsradius r beschreibt die Erzeugungslinie daher ein Plücker'sches Conoid (Ball'sches Cylindroid).*

Aus dem Windungsparameter $p = \frac{R^2}{r}$ findet man $p = \frac{1}{2} \varrho\, sin\, 2H$ und mithin $u : p = r : \varrho = tg\, H$.

* Vgl. Demoulin, Quelques remarques relatives à la théorie des courbes gauches (Bulletin de la société mathém de France, T. XX, p. 43—46). Ueber das Plücker'sche Conoid vgl. Plücker, Neue Geometrie des Raumes. Leipzig 1868, S. 97; Ball, The theorie of screws, Dublin 1876; Lewis, On the Cylindroid. Messenger of Math., Vol. IX, p. 1—5 (1879); sowie meine Theorie der Bewegung und der Kräfte, Leipzig 1879, B. II, S. 218 u. flg.

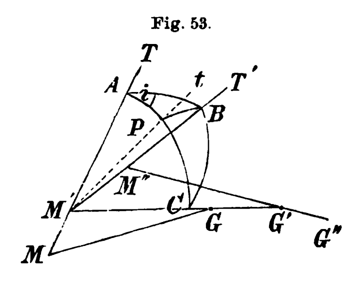
XII. Capitel.

Die cyclificirenden Flächen.

§ 1. Die cyclificirende Fläche als Verallgemeinerung der rectificirenden Fläche. Die rectificirende Fläche ist die abwickelbare Fläche, welche durch die Curve hindurchgeht und bei ihrer Abwickelung dieselbe in eine Gerade transformirt. Das Problem, die rectificirende Fläche einer Curve zu finden, ist nur ein specieller Fall eines allgemeineren, welches verlangt, durch die Curve eine abwickelbare Fläche zu legen, durch deren Abwickelung dieselbe in einen Kreis von gegebenem Radius A oder wenigstens ein Bogen der Curve in einen Kreisbogen von diesem Radius übergeht. Eine solche Fläche nennen wir eine cyclificirende Fläche der Curve, ihre Tangentenebenen die cyclificirenden Ebenen und ihre Erzeugungslinien die cyclificirenden Geraden derselben.* Wird der Radius $A = \infty$, so geht der Kreis in eine Gerade und die cyclificirende Fläche in die rectificirende über.

Zunächst ist leicht zu zeigen, dass die cyclificirende Fläche für den Radius A nur dann möglich ist, wenn A nicht kleiner, als der grösste Krümmungsradius der zu transformirenden Curve oder des zu transformirenden Theiles derselben ist. Sind nämlich (Fig. 53) MG, $M'G'$, $M''G''$ die drei durch die Punkte M, M', M'' gehenden cyclificirenden Geraden und dreht man das Flächenelement $M'G'M''$ um die Gerade $M'G'$ um, bis es mit dem Flächenelemente $M'GM$ in eine Ebene fällt, so gelangt die Tangente $M'T'$ in die Lage $M't$ und geht der Contingenzwinkel $TM'T' = d\tau$ der Curve doppelter Krümmung in den Contingenzwinkel $TM't = d\tau_1$ der transformirten ebenen Curve, des Kreises, über. Bei dieser Bewegung beschreibt die Tangente $M'T'$ das Element eines geraden Kegels um $M'G$ als

Fig. 53.



* Molins, De la surface développable passant par une courbe donnée quelquonque, et qui, par son développement, transformerait cette courbe en un arc de cercle de rayon donné. Journ. d. Math. 2ième Série. T. I. p. 265.

Axe, und da die Ebene $T'M't$ demzufolge senkrecht steht auf der Ebene $TM'G$, so bilden die drei Tangenten $M'T$, $M'T'$ und $M't$ eine an der Kante $M't$ rechtwinklige Ecke und ist mithin $\sphericalangle TM'T'$ nicht kleiner als $\sphericalangle TM't$, d. h. $d\tau$ nicht kleiner als $d\tau_1$, und da das Bogenelement $MM' = ds$ hierbei nicht alterirt wird, so folgt aus den Gleichungen

$$d\tau = \frac{ds}{\varrho}, \quad d\tau_1 = \frac{ds}{A},$$

worin ϱ den Krümmungshalbmesser in M bedeutet, dass A nicht kleiner als ϱ sein kann. Da dies in allen Punkten der Curve (M) gilt, so folgt, dass die Transformation nur insoweit möglich ist, also die cyclificirende Fläche nur insoweit existiren kann, als der gegebene Radius A nicht kleiner als alle in Frage kommenden Krümmungshalbmesser ϱ, d. h. nicht kleiner als der grösste unter ihnen ist.

§ 2. Neigung der cyclificirenden Ebene gegen die Schmiegungsebene. Um den Neigungswinkel i der cyclificirenden Ebene gegen die Schmiegungsebene der Curve (M) zu finden, beschreiben wir um M' mit der Einheit als Radius eine Kugel. Auf ihr bestimmen die Tangenten MT, $M'T'$ und die cyclificirende Gerade $M'G$ ein sphärisches Dreieck ABC, in welchem $\sphericalangle A = i$ ist und C den unendlich kleinen Winkel darstellt, den die cyclificirende Ebene $AM'C$ mit der folgenden cyclificirenden Ebene $BM'C$ bildet. Ein Perpendikel BP von der Ecke B auf die gegenüberliegende Seite AC gefällt, theilt diese so, dass $PC = BC$ und $AP = d\tau_1$ wird. Daher folgt aus dem unendlich kleinen bei P rechtwinkligen Dreieck ABP, in welchem $AB = d\tau$ ist,

$$\cos i = \frac{d\tau_1}{d\tau}$$

und folglich mit Hülfe der vorigen Werthe für $d\tau$ und $d\tau_1$:

$$\cos i = \frac{\varrho}{A},$$

d. h.

Die cyclificirende Ebene bildet mit der Schmiegungsebene der Curve einen Winkel, dessen Cosinus durch das Verhältniss des Krümmungshalbmessers derselben zum Radius der transformirten Curve angegeben wird.

Man sieht hieraus, dass der Winkel i im Allgemeinen variabel und nur bei den Curven von constantem Krümmungshalbmesser con-

stant ist. Legt man durch alle Tangenten der Curve (M) Ebenen, welche unter dem Winkel i gegen die Schmiegungsebenen geneigt sind, so sind sie die cyclificirenden Ebenen, schneiden sich in den cyclificirenden Geraden und erzeugen als Enveloppe die cyclificirende Fläche. Nun giebt es aber durch jede Tangente zwei Ebenen, welche mit der Schmiegungsebene den Winkel i bilden, daher giebt es für jeden Werth von A, für welchen das Problem möglich ist, zwei cyclificirende Flächen. Für $A = \infty$ fallen beide Flächen in eine zusammen, nämlich in die rectificirende Fläche. Ist ϱ_0 der grösste Krümmungshalbmesser der zu transformirenden Curve, so sind cyclificirende Flächen blos möglich für alle Werthe von A zwischen ϱ_0 und ∞. Ist der grösste Krümmungshalbmesser $\varrho_0 = \infty$, so muss $A = \infty$ werden, es giebt dann nur eine cyclificirende Fläche, nämlich die rectificirende, welche die Curve in einen unendlich grossen Kreis, nämlich in eine Gerade verwandelt.

Ist die Curve (M) ein Kreis, so ist ϱ constant, also auch i. Die beiden cyclificirenden Flächen sind gerade Kegel und der Radius des transformirten Kreises ist $A = \frac{\varrho}{\cos i}$. Für die Curven von constantem Krümmungshalbmesser $\varrho = a$ ist auch i constant, und da man $A = a$ setzen kann, wodurch $\cos i = 1$, also $i = 0$ wird, so folgt, dass für diese Curven die Tangentenfläche eine cyclificirende Fläche ist. Die Curven von constantem Krümmungshalbmesser gehen also durch Abwickelung ihrer Tangentenfläche in Kreise über; der Radius des Kreises ist jedesmal dem constanten Krümmungshalbmesser gleich.

§ 3. Neigung der cyclificirenden Geraden gegen die Tangente. Um die Neigung ϑ der cyclificirenden Geraden $M'G'$ gegen die Tangente MT zu finden (Fig. 53), hat man in dem Dreieck ABC: Seite $AC = \vartheta$, $BC = \vartheta - d\tau_1$ und $B = \pi - (i + di \pm d\sigma)$. Letzteres sieht man ein, wenn man bedenkt, dass die cyclificirenden Ebenen $GM'T$ und $G'M'T'$ mit den Schmiegungsebenen der Punkte M und M' die Winkel i und $i + di$, die letzteren aber mit einander den Schmiegungswinkel $d\sigma$ bilden, mithin die zweite der cyclificirenden Ebenen gegen die erste Schmiegungsebene unter einem Winkel $i + di \pm d\sigma$ geneigt ist. Die doppelten Vorzeichen beziehen sich hierbei auf die eine und die andere der cyclificirenden Flächen. Daher erhält man

$$\frac{\sin(\vartheta - d\tau_1)}{\sin\vartheta} = \frac{\sin i}{\sin(i + di \pm d\sigma)}$$

und hieraus durch Reduction auf Unendlichkleines gleicher Ordnung mit Rücksicht auf $\cos i = \frac{d\tau_1}{d\tau}$:

$$\cotg\vartheta = \frac{di \pm d\sigma}{\sin i \cdot d\tau} = \frac{1}{\sin i}\left\{\frac{di}{d\tau} \pm \frac{d\sigma}{d\tau}\right\}.$$

Aus der Gleichung

$$\cos i = \frac{\varrho}{A}$$

folgt

$$di = -\frac{d\varrho}{A\sin i} = -\frac{d\varrho}{\sqrt{A^2 - \varrho^2}},$$

daher wird

$$\cotg\vartheta = \frac{-\frac{d\varrho}{d\tau}}{A\left(1 + \frac{\varrho^2}{A^2}\right)} \pm \frac{\frac{d\sigma}{d\tau}}{\sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{A^2}}}.$$

Für die Curven von constantem Krümmungshalbmesser ist $d\varrho = 0$, mithin

$$\cotg\vartheta = \pm\frac{\varrho \,.\, A}{r\sqrt{A^2 - \varrho^2}},$$

für die Cylinderhelix wird ϑ constant.

§ 4. **Contingenzwinkel** $\breve{d\tau}$ **und Schmiegungswinkel** $\breve{d\sigma}$ **der Gratlinie der cyclificirenden Fläche.** Den ersteren erhält man aus dem Dreieck $MM'G$ (Fig. 53), in welchem $MGM' = \breve{d\tau}$, $M'MG = \vartheta$, $AM'G = PM'G \pm AM'P = BM'G \pm AM'P = \vartheta + d\vartheta \pm d\tau$, ist, nämlich

$$\breve{d\tau} = d\vartheta \pm d\tau_1 = d\vartheta \pm d\tau \cdot \cos i,$$

der Winkel $\breve{d\sigma}$ ist aber der Winkel C des Dreiecks ABC, aus welchem folgt:

$$\breve{d\sigma} = \frac{\sin i}{\sin\vartheta} \cdot d\tau$$

oder weil nach § 3

$$\sin i \cdot d\tau = tg\,\vartheta \cdot (di \pm d\sigma)$$

$$\breve{d\sigma} = \frac{di \pm d\sigma}{\cos\vartheta}$$

oder weil

$$\cos\vartheta = \frac{di \pm d\sigma}{\sqrt{(di \pm d\sigma)^2 + d\tau^2 \cdot \sin^2 i}}$$

wird

$$\breve{d\sigma}^2 = (di \pm d\sigma)^2 + d\tau^2 \cdot \sin^2 i.$$

Diesem Ausdruck kann man noch die folgende Form geben, indem man für di und $\sin i$ die Werthe aus § 3 einsetzt und für $d\varrho$ das gleichbedeutende $h d\sigma$ setzt (Cap. V. § 2):

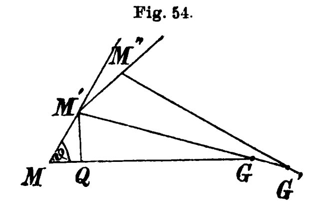
$$d\breve{\sigma}^2 = \frac{(h \mp \sqrt{A^2-\varrho^2})^2}{A^2-\varrho^2} \cdot d\sigma^2 + \left(1 - \frac{\varrho^2}{A^2}\right) d\tau^2.$$

Für die Curven von constantem Krümmungshalbmesser wird

$$d\breve{\sigma}^2 = d\sigma^2 + d\tau^2 \cdot \sin^2 i.$$

§ 5. **Das Bogenelement** $GG' = d\breve{s}$ (Fig. 54) **der Gratlinie der cyclificirenden Fläche** ergiebt sich folgendermassen. Es ist,

Fig. 54.

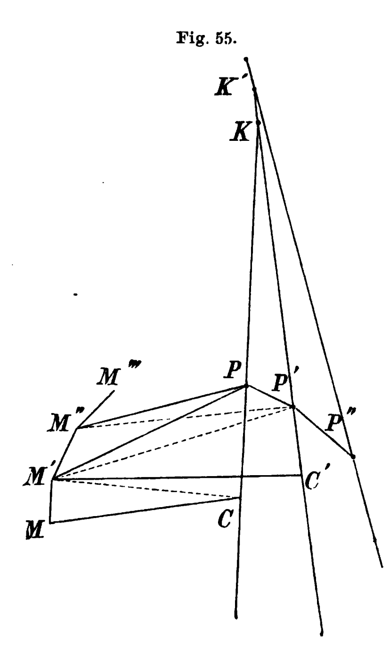


wenn $M'Q$ senkrecht zu MG gezogen wird: $GG' = G'M' - GM' = G'M' - GQ = G'M' - (GM - MQ) = (G'M' - GM) + MQ = d(MG) + ds \cos\vartheta$. Daher wird, weil aus dem Dreieck MGM' sofort MG gezogen werden kann, nämlich:

$$MG = \frac{ds}{d\breve{\tau}} \cdot \sin\vartheta$$

$$d\breve{s} = d\left(\frac{ds}{d\breve{\tau}} \sin\vartheta\right) + ds \cdot \cos\vartheta.$$

Fig. 55.



§ 6. **Beziehungen einer Curve und der Gratlinie ihrer cyclificirenden Flächen.** Die Gleichung $\cos i = \frac{\varrho}{A}$ liefert eine leichte Construction der cyclificirenden Ebene. Bestimmt man nämlich den Krümmungsmittelpunkt C und die Krümmungsaxe CK (Fig. 55) für den Punkt M der Curve und sucht auf der letzteren einen Punkt P, dessen Abstand PM von M gleich dem Radius A der Kreistransformation ist, so ist eine Ebene, welche durch P und die Tangente in M geht, die eine und eine Ebene, welche durch dieselbe Tangente und den mit P symmetrisch gegen den Krümmungsmittelpunkt C liegenden Punkt Q der Krümmungsaxe geht, die andere cyclificirende

Ebene des Punktes M. Die Punkte P, Q sind zugleich (Cap. V, § 10) die Mittelpunkte zweier Kugeln vom Radius A oder auch die Mittelpunkte zweier Kegel, welche die Curve in M in der zweiten Ordnung berühren. Die Folge der Punkte P und Q bildet also auf der Fläche der Krümmungsaxen die Orte der Mittelpunkte der Osculationskugeln für die Curve (M) vom Radius A.

Die beiden Curven P und Q haben sehr interessante Beziehungen zur Curve (M). Sind nämlich $M, M', M'', M''', \ldots$ und $P, P', P'', P''' \ldots$ die Reihen entsprechender Punkte der Curven (M) und (P), so ist

$$\begin{aligned} MP &= M'P = M''P = A \\ M'P' &= M''P' = M'''P' = A \\ M''P'' &= M'''P'' = M^{IV}P'' = A \end{aligned}$$

und daher auch

$$M''P = M''P' = M''P'' = A$$

d. h. es ist M'' der Mittelpunkt einer Kugel vom Radius A, welche durch die drei Punkte P, P', P'' geht und also die Curve (P) im Punkte P in der zweiten Ordnung berührt. Ebenso ist M''' Mittelpunkt einer Kugel von demselben Radius, welche die Curve (P) im folgenden Punkte P' osculirt u. s. w. Aehnliches gilt in Bezug auf die Curven (M) und (Q). Daher liegt die Curve (M) auf der Fläche der Krümmungsaxen der Curven (P) und (Q) d. h.:

Von den beiden Curven (M) und (P) (oder (M) und (Q)) ist jede der Ort der Mittelpunkte der Osculationskugeln vom constanten Radius A für die andere und liegt jede auf der Fläche der Krümmungsaxen der anderen.

Ferner hat PP' die Richtung einer Tangente an die Kugel um M'', welche durch P, P', P'' geht, und steht mithin senkrecht auf $M''P$, ebenso ist es aber Tangente an eine Kugel, welche durch den dem Punkte P vorhergehenden Punkt, durch P und P' gehen würde und ihren Mittelpunkt in M' hätte, daher steht PP' auch senkrecht auf $M'P$; folglich steht PP' auf der Ebene $M'PM''$ senkrecht. Diese Ebene ist aber cyclificirende Ebene in M'. Daher:

Die Tangente der Curve (P) (oder (Q)) steht senkrecht auf der cyclificirenden Ebene oder die cyclificirende Ebene ist die Normalebene der Curve (P) (oder (Q)).

Ebenso ist die cyclificirende Ebene von (P) Normalebene der Curve (M). Es stehen also die Curven (M), (P) in solcher Be-

ziehung, dass die Normalebene jeder durch die Tangente der andern geht, also ihre Normalebenen aufeinander senkrecht stehen und die Bogenelemente sich rechtwinklig kreuzen. In der That muss, wenn $M''P' = M'P$ sein soll, da beide Linien einen unendlich kleinen Winkel miteinander bilden, die eine die Projection der andern auf ihre Richtung sein.

Wickelt man die Fläche der Krümmungsaxen von (M) ab und denkt dabei die Punkte der Curve (M) in den Tangentenebenen der Fläche als fest, so gelangt bei diesem Vorgange M' nach M'' und es stehen P, P' von den vereinigten Punkten, nämlich von M'' um den Radius A ab. Hierauf gelangt M'' nach M''' und es stehen P', P'', also auch P, P', P'' von M''' um A ab; gelangt M''' nach M^{IV}, so folgt, dass P, P', P'', P''' von diesem Punkte um dieselbe Strecke A abstehen u. s. f. Schliesslich erhält man einen Punkt, von welchem alle Punkte der Curve (P) gleichweit abstehen. Hieraus erkennt man die Richtigkeit des Satzes:

Die Curve (P) (oder (Q)) der Osculationskugeln vom Radius A hat die Eigenschaft, dass sie durch Abwickelung der Fläche der Krümmungsaxen, auf welcher sie liegt, in einen Kreis vom Radius A übergeht.

Construirt man daher zu der Curve P die Fläche ihrer Krümmungsaxen, so geht ebenso die Curve (M), welche auf ihr liegt, in einen Kreis vom Radius A über; dasselbe geschieht, wenn man die Fläche der Krümmungsaxen der Curve (Q) abwickelt. Diese sind also die beiden cyclificirenden Flächen und die Curve ihr gemeinsamer Durchschnitt. Daher:

Die beiden cyclificirenden Flächen einer Curve (M) für den Radius A sind die Flächen der Krümmungsaxen der Curven $(P), (Q)$, welche den Ort der Osculationskugelmittelpunkte vom Radius A für die Curve (M) bilden.

Hieraus folgt noch, dass die rectificirende Fläche einer Curve (M) die Fläche der Krümmungsaxen für den Ort der Mittelpunkte der Kugeln von unendlich grossem Radius (der Schmiegungsebenen), d. h. die Fläche der Krümmungsaxen für die unendlich ferne Curve auf der Fläche der Krümmungsaxen von (M) ist.

§ 7. Osculationskugeln von constantem Radius. Die Curven der Mittelpunkte der Osculationskugeln von constantem

Radius erlangen durch diese Betrachtungen eine auffallende Bedeutung. Die §§ 3, 4, 5 liefern für sie den Contingenzwinkel und Schmiegungswinkel. Da nämlich die cyclificirende Fläche die Fläche der Krümmungsaxen für die Curve *(P)* ist, so ist der Contingenzwinkel der Curve *(P)* gleich dem Schmiegungswinkel der Gratlinie der cyclificirenden Fläche, nämlich gleich

$$\sqrt{(di \pm d\sigma)^2 + d\tau^2 \sin^2 i}$$

und der Schmiegungswinkel ist gleich dem Contingenzwinkel derselben, nämlich gleich

$$d\vartheta \pm d\tau \cos i.$$

Das Bogenelement der Curve *(P)* ergiebt sich so. Es ist

$$PP' : PK = \sin PKP' : \sin PP'K.$$

Nun wird aber $PP'K = CPP' - CKP'$ und es ist, weil PP' zu $M'P$ senkrecht ist, $CPP' = \frac{\pi}{2} - CPM' = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - PM'C) = PM'C = PMC = i$, mithin $PP'K = i - d\sigma$, weil $CKP' = d\sigma$. Daher wird jetzt

$$PP' : PK = \sin d\sigma : \sin (i - d\sigma)$$

oder

$$PP' = \frac{d\sigma}{\sin i} \cdot PK.$$

Ferner hat man $PK = CK \mp CP$, je nachdem P der einen oder andern cyclificirenden Fläche entspricht, und wenn man $CK = h$, $CP = k$ setzt:

$$PK = h \mp k$$

und daher

$$PP' = \frac{d\sigma}{\sin i}(h \mp k) = \frac{h d\sigma}{\sin i} \mp \frac{k d\sigma}{\sin i}.$$

Bedenkt man, dass

$$h d\sigma = d\varrho,\ k = \sqrt{A^2 - \varrho^2}$$

ist, so erhält man für die Bogenelemente ds'', ds''' der beiden Curven P, Q

$$ds'' = \frac{d\varrho}{\sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{A^2}}} - A d\sigma$$

$$ds''' = \frac{d\varrho}{\sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{A^2}}} + A d\sigma.$$

Addirt man diese Ausdrücke, so kommt noch

$$\frac{ds'' + ds'''}{2} = \frac{d\varrho}{\sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{A^2}}}$$

und hieraus durch Integration

$$\frac{s'' + s'''}{2} = A \, arc \sin \left(\frac{\varrho}{A}\right) + const.$$

§ 8. Für die Helix eines Kreiscylinders ist i sowie ϑ constant, nämlich

$$\cos i = \frac{\varrho}{A}, \quad \cos \vartheta = \frac{\varrho A}{r \sqrt{A^2 - \varrho^2}};$$

es bilden mithin die cyclificirenden Ebenen mit den Schmiegungsebenen und in ihnen die cyclificirenden Geraden mit den Tangenten der Helix constanten Winkel. Da nun auch die Schmiegungsebene der Helix mit der Erzeugungslinie des Cylinders einen constanten Winkel bildet, nämlich den Winkel, unter welchem die Helix gegen die Erzeugungslinien des Cylinders geneigt ist, so folgt, dass die cyclificirenden Ebenen und in ihnen die cyclificirenden Geraden gegen die Erzeugungslinien des Cylinders ebenfalls constante Neigung haben. Hieraus ergiebt sich weiter, dass die Punkte der Gratlinie der cyclificirenden Fläche von den Erzeugungslinien des Cylinders gleichen Abstand haben und folglich selbst wieder auf einem mit jenem concentrischen Cylinder liegen und dass die Tangenten der Gratlinie gegen die Erzeugungslinie dieses dieselbe constante Neigung haben. Daher ist die Gratlinie ebenfalls eine Helix und die cyclificirenden Flächen sind abwickelbare Helicoide.

§ 9. Die Gratlinien sämmtlicher cyclificirenden Flächen einer Curve bilden eine Fläche, welche symmetrisch getheilt wird durch die Fläche der Schmiegungsebenen, nämlich durch die Tangentenfläche. Auf dieser Fläche sind die Gratlinie der rectificirenden Fläche und die Gratlinie derjenigen cyclificirenden Fläche, welche dem kleinsten Werth von A entspricht, bei welchem die Kreistransformation noch möglich ist, ausgezeichnete Linien.

§ 10. Umkehrung des Problems der cyclificirenden Flächen. Das Problem der cyclificirenden Flächen ist einer Umkehrung fähig. Man kann nämlich die Aufgabe stellen: „auf einer abwickelbaren Fläche die Curven zu finden, welche durch

Abwickelung der Fläche in einen Kreis von gegebenem Radius A transformirt werden." Hierbei sind alle Elemente $\breve{ds}$, $\breve{d\tau}$, $\breve{d\sigma}$, $\breve{\varrho}$, u. s. w. der Gratlinie $GG'G''\ldots$ (Fig. 53) dieser Fläche als gegeben anzusehen. Nimmt man nun auf der Tangente des Punktes G einen Punkt M willkürlich an und zieht durch ihn in der Schmiegungsebene von G, nämlich in der Tangentenebene der Fläche eine Gerade, welche mit der Tangente einen willkürlichen Winkel macht, so können dieser Punkt und diese Gerade als die Anfangselemente der Construction einer der gesuchten Curven angesehen werden. Die Gerade bestimmt nämlich auf der folgenden Tangente in G' einen zweiten Punkt M' und dadurch das Bogenelement und den Contingenzwinkel $d\tau_1$ der transformirten Curve vermöge der Bedienung $MM' = A \cdot d\tau_1$. Zieht man also die Gerade $M't$ durch M' in der Schmiegungsebene von G so, dass tM' mit dem verlängerten Bogenelemente MM' den Winkel $d\tau_1$ bildet, was auf zwei Arten geschehen kann, und legt durch tM' eine Ebene senkrecht zur Ebene $MM'G$, so bestimmt diese auf der folgenden Schmiegungsebene ein weiteres Bogenelement $M'M''$ und zugleich den Contingenzwinkel der Curve (M). Durch Fortsetzung der Construction findet man den folgenden Werth von $d\tau_1$ und mit dessen Hülfe ein weiteres Bogenelement u. s. f.

Man ersieht hieraus, dass die Construction einer Curve auf einer abwickelbaren Fläche, welche durch deren Abwickelung in einen Kreis von gegebenem Radius übergeht, von zwei beliebig angenommenen Elementen, einem Punkte der Curve und der Tangente in ihm abhängt und dass durch jeden Punkt der Fläche zwei Curven der Art gehen.

Bezeichnen L und ϑ die Länge MG und den Winkel $M'MG$ für irgend eine Stelle der Curve (M), so sieht man leicht, dass

$$d\tau_1 = (\vartheta + \breve{d\tau}) - (\vartheta + d\vartheta) = \breve{d\tau} - d\vartheta,$$

$$ds = \frac{L}{\sin\vartheta}\,\breve{d\tau}$$

und folglich die Bedingungsgleichung der Aufgabe ist:

$$\frac{L}{\sin\vartheta} \cdot \frac{\breve{d\tau}}{\breve{d\tau} - d\vartheta} = A.$$

Weiter erhellt aus § 5, dass

$$dL = \breve{ds} - ds \cos\vartheta = \breve{ds} - L \operatorname{cotg}\vartheta \cdot \breve{d\tau}$$

und dies sind die beiden simultanen Differentialgleichungen, mit Hülfe von deren Integration das Problem analytisch gelöst werden kann.*

Man findet noch

$$d\tau^2 = d\tau_1^{\,2} + \sin^2\vartheta\, \breve{d\sigma}^2 = (\breve{d\tau} - d\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta \cdot \breve{d\sigma}^2$$

oder wenn man $\breve{d\tau} - d\vartheta$ mit Hülfe der ersten der beiden vorigen Gleichungen eliminirt:

$$d\tau^2 = \frac{L^2}{A^2 \sin^2\vartheta} \cdot \breve{d\tau}^2 + \sin^2\vartheta \cdot \breve{d\sigma}^2$$

und hiermit erhält man weiter für den Krümmungshalbmesser der gesuchten Curve

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{A^2} + \left(\frac{\breve{d\sigma}}{\breve{d\tau}}\right)^2 \frac{\sin^4\vartheta}{L^2}$$

oder wegen

$$\frac{\breve{d\sigma}}{\breve{d\tau}} = \frac{\breve{\varrho}}{\breve{r}}$$

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{A^2} + \frac{\breve{\varrho}^2}{\breve{r}^2} \cdot \left(\frac{\sin^2\vartheta}{L}\right)^2.$$

XIII. Capitel.

Die Evolutoiden.

§ 1. Evolutoide. Zieht man durch die aufeinanderfolgenden Punkte $M, M', M'', \ldots$ einer Curve Gerade, welche mit den Tangenten in diesen Punkten constanten Winkel α bilden und sich aufeinanderfolgend in den Punkten $N, N', N'', \ldots$ schneiden, so bildet die Folge der Punkte N eine Curve, welche eine **Evolutoide** der Curve (M) genannt wird.** Ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so geht die Evolutoide in eine Evolute über. Die Evoluten bilden also eine Species der Evolutoiden. Daher der Name.

Die Evolutoide ist die Gratlinie einer abwickelbaren Fläche, welche durch die Curve geht und deren Erzeugungslinien mit den

---

* Vgl. Molins a. a. O. p. 283.

** Vgl. Lancret, Mém. sur les développoïdes des courbes planes, des courbes à double courbure et des surfaces développables. Mém. prés. à l'Inst. T. II p. 19.

Tangenten der Curve constanten Winkel bilden. Sobald dieser Winkel α und irgend eine Erzeugungslinie, z. B. die durch den Punkt M gehende, gegeben sind, so ist diese Fläche und mit ihr die Evolutoide vollständig bestimmt. Ein und demselben Winkel α entsprechen aber unendlich viele Evolutoiden, denn man kann zur Anfangstangente derselben jeden Strahl eines Rotationskegels wählen, dessen Mittelpunkt in M liegt, dessen Axe die Tangente der Curve in diesem Punkte und dessen halbe Oeffnung gleich α ist. Es hängt daher die specielle Evolutoide von zwei Bedingungen ab, von der Grösse des Winkels α und der Lage der Anfangstangente. Die sämmtlichen Evolutoiden einer Curve bilden daher eine Doppelschaar. In dieser sind einzelne ausgezeichnete Schaaren enthalten, insbesondere die Schaar der Evoluten, entsprechend dem Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$; für $\alpha = 0$ reducirt sich die entsprechende Schaar auf die Curve selbst.

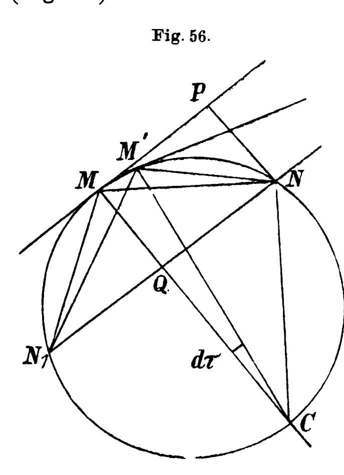
§ 2. Evolutoidenfläche. Die sämmtlichen einem bestimmten Winkel α entsprechenden Evolutoiden bilden eine krumme Fläche, die Evolutoidenfläche, und die sämmtlichen Evolutoidenflächen eine Flächenschaar, in welcher die Fläche der Krümmungsaxen als die Fläche der Evoluten enthalten ist. Lässt man den Winkel α continuirlich von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wachsen, so ändert sich die Evolutoidenfläche selbst continuirlich und geht schliesslich in ihre Grenze, die Fläche der Krümmungsaxen über.

§ 3. Erzeugung der Evolutoidenfläche. Jede einem bestimmten Winkel α entsprechende Evolutoidenfläche zerfällt in zwei Aeste. Denkt man sich nämlich den Kegel, auf welchem die Anfangstangenten aller Evolutoiden liegen, die dem Winkel α entsprechen, so bewegt, dass sein Mittelpunkt die Curve (M) beschreibt und seine Axe stets Tangente dieser Curve bleibt, so liegen die sämmtlichen dem Punkte M entsprechenden Punkte N aller dieser Evolutoiden auf der Durchschnittscurve der beiden unendlich nahen Kegel in M und M'; ebenso die sämmtlichen Punkte N' der Evolutoiden, entsprechend dem Punkte M' auf dem Durchschnitt der Kegel in M' und M'' u. s. f. Es erzeugt daher die Durchschnittscurve zweier aufeinanderfolgender Kegel die Fläche der Evolutoiden, diese Linie ist die Charakteristik und der Kegel die Erzeugungsfläche der Evolutoidenfläche, welche deren Enveloppe ist. Nun

schneiden aber die beiden Flächentheile des Kegels in M die beiden Flächentheile des folgenden Kegels in M' in zwei distincten Curven, von denen jede bei der Bewegung des Kegels eine Fläche für sich beschreibt, welche ein Ort von Evolutoiden ist. Daher besteht der Gesammtort aller Evolutoiden aus diesen beiden getrennten Flächenästen. Blos für $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ fallen diese beiden Flächenäste zusammen.

§ 4. Charakteristik der Evolutoidenfläche. Die Durchschnittslinie zweier aufeinanderfolgender Kegel oder die Charakteristik der Evolutoidenfläche ist eine ebene Curve und zwar eine Hyperbel. Um den ersten Theil dieses Satzes zu erweisen, legen wir durch die Tangenten in M und M', welche die Axen der beiden Kegel sind, die Schmiegungsebene des Punktes M (Fig. 56). Diese Ebene schneidet den Kegel, dessen Mittelpunkt in M liegt, längs zweien Geraden, welche mit der Tangente in M Winkel gleich α bilden. Ebenso schneidet sie den Kegel des Punktes M' in zwei Geraden von derselben Eigenschaft. Diese Geraden liefern zwei Punkte N der Durchschnittslinie beider Kegel und jeder solche Punkt ist die Spitze eines Dreiecks MNM', dessen Winkel MNM' gleich dem Contingenzwinkel $d\tau$ der Curve (M) ist. Diese beiden Punkte liegen daher gleichweit ab von der Tangente in M und ihre Verbindungslinie, welche dieser Tangente parallel ist, wird von der Hauptnormalen des Punktes M in Q halbirt. Die Punkte N liegen aber auch, da die Winkel MNM' gleich $d\tau$ sind, in einem Kreise, welcher über dem Krümmungshalbmesser $MC = \varrho$ als Durchmesser beschrieben werden kann; daher ist Winkel MNC ein Rechter und wenn man noch von N das Perpendikel NP auf die Tangente fällt, so ist:

Fig. 56.

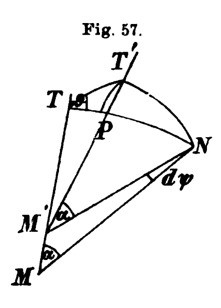


$$MN = \varrho \sin\alpha, \quad NP = \varrho \sin^2\alpha, \quad MP = \varrho \sin\alpha \cos\alpha.$$

Legen wir jetzt durch die Tangente des Punktes M irgend eine andere Ebene, welche mit der Schmiegungsebene einen Winkel ϑ

bildet, so schneidet sie die Durchschnittscurve beider Kegel gleichfalls in zwei Punkten N, welche die Spitzen von zwei Dreiecken MNM' sind, deren Winkel MNM' aber nicht gleich $d\tau$, sondern gleich $d\tau \cdot \cos\vartheta$ sind. Es bildet nämlich die Gerade $M'N$ (Fig. 57) mit den Tangenten MT, $M'T$ in den Punkten M, M' eine dreiflächige Ecke $TT'N$, für welche, wenn MNM' mit $d\psi$ bezeichnet wird, $TN = \alpha + d\psi$, $T'N = \alpha$, $TT' = d\tau$ ist, und wenn man von T' das Perpendikel $T'P$ auf die gegenüberliegende Seite TN fällt, $PN = T'N = \alpha$, mithin $TP = d\psi$ wird. Der Winkel NTT' aber ist gleich ϑ; daher folgt aus dem unendlich kleinen Dreieck TPT':

Fig. 57.



$$d\psi = d\tau \,.\, \cos\vartheta.$$

Die beiden Punkte N liegen auch jetzt noch gleich weit ab von der Tangente in M und ihre Verbindungslinie ist daher auch jetzt noch parallel zu dieser. Sie liegen auch jetzt auf einem Kreise, welcher über der Sehne MM' den Peripheriewinkel $d\psi$ fasst und daher ist der Durchmesser dieses Kreises

$$\frac{MM'}{d\psi} = \frac{MM'}{d\tau} \cdot \frac{1}{\cos\vartheta}$$

oder, weil $\frac{MM'}{d\tau}$ gleich dem Krümmungshalbmesser ϱ der Curve (M) ist

$$\frac{\varrho}{\cos\vartheta}.$$

Projicirt man sie auf die Tangente und Schmiegungsebene nach p und n, so wird ähnlich, wie vorher

$$MN = \frac{\varrho}{\cos\vartheta} \cdot \sin\alpha,\; Np = \frac{\varrho}{\cos\vartheta} \cdot \sin^2\alpha,\; Mp = \frac{\varrho}{\cos\vartheta} \cdot \sin\alpha\cos\alpha$$

$$pn = Np \cdot \cos\vartheta = \varrho \sin^2\alpha,\; Nn = Np \cdot \sin\vartheta = \varrho\, tg\,\vartheta \cdot \sin^2\alpha.$$

Hieraus ersieht man, dass die Projectionen der Punkte N auf die Schmiegungsebene mit den in dieser Ebene selbst liegenden Punkten N in eine Gerade fallen, welche der Tangente des Punktes M im Abstande $\varrho \sin^2\alpha$ parallel läuft. Es liegen daher alle Punkte N, d. h. die sämmtlichen Punkte der Durchschnittslinie der beiden Kegel in einer Ebene, welche auf dem Krümmungshalbmesser senkrecht steht und von der rectificirenden Ebene um die Strecke $\varrho \sin^2\alpha$ entfernt

ist. Daher ist diese Durchschnittslinie eine ebene Curve. Da aber die Ebene dieser Curve der Tangente in M, d. h. der Axe des Kegels in M parallel läuft, so ist sie eine Hyperbel.

Legt man durch die Tangente des Punktes M die beiden Ebenen, welche mit der Schmiegungsebene denselben Winkel ϑ bilden, so liefern sie vier Punkte N, welche paarweise symmetrisch gegen die Schmiegungsebene liegen. Hieraus folgt, dass die Durchschnittslinie der Ebene der Hyperbel mit der Schmiegungsebene die Hauptaxe dieser ist; wird sie mit $2A$ bezeichnet, so ist

$$A = \varrho \sin \alpha \cos \alpha.$$

Ferner folgt, dass, weil die Ebene der Hyperbel mit der rectificirenden Ebene, also auch mit den beiden Strahlen des Kegels in M, welche in diese fallen, parallel ist, dass die Asymptoten der Hyperbel diesen Strahlen parallel sind, dass mithin der Asymptotenwinkel derselben 2α und die halbe Nebenaxe

$$B = A \, tg \, \alpha = \varrho \sin^2 \alpha$$

ist.

Die sämmtlichen Kreise, auf welchen die Punkte N liegen und deren Durchmesser die verschiedenen Werthe von $\frac{\varrho}{\cos \vartheta}$ haben, wenn ϑ bis 0 von 2π geht, erfüllen eine interessante Fläche. Die Mittelpunkte dieser Kreise fallen in die Normalebene und es haben die Endpunkte der Durchmesser vom Punkte M einen Abstand

$$\frac{\varrho}{\cos \vartheta},$$

daher ist ϱ ihre Projection auf der Schmiegungsebene und liegen sie alle in der Krümmungsaxe. Die Normalebene hat mit dieser Fläche nur die Krümmungsaxe und den Punkt M gemein, während jede Tangentenebene sie in einem Kreise schneidet; die Schmiegungsebene liefert den kleinsten dieser Kreise, die rectificirende den grössten, nämlich den unendlich grossen. Auf dieser Fläche liegt die Hyperbel, welche der Ort der Punkte N ist.

Auf dieser Fläche liegen aber auch alle anderen Hyperbeln, welche den verschiedenen Werthen des Winkels α entsprechen, wie man daraus sieht, dass der Durchmesser der Kreise von α unabhängig ist. Die Fläche wird daher parallel der rectificirenden Ebene in Hyperbeln geschnitten, und wenn α von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ anwächst,

so bewegt sich die Ebene eines solchen Schnitts von der rectificirenden Ebene der Curve *M* bis zur rectificirenden Ebene der Curve der Mittelpunkte ihrer Schmiegungskugeln und wächst der Asymptotenwinkel von 0 bis π. Die Hyperbel geht dabei continuirlich von der Tangente der Curve *M* durch alle Zwischenstufen hindurch in die Krümmungsaxe über.

§ 5. Jede Evolutoide ist eine kürzeste Linie auf der Evolutoidenfläche. Es ist nämlich die Evolutoide die Gratlinie einer abwickelbaren Fläche, deren Erzeugungslinien mit den Tangenten der Curve constanten Winkel bilden. Daher ist die Ebene zweier aufeinanderfolgender Erzeugungslinien die Schmiegungsebene der Evolutoide. Sie geht aber durch die Tangente und steht folglich auf der Tangentenebene des geraden Kegels senkrecht, dessen Axe die Tangente ist und auf welchem die Tangente der Evolutoide liegt. Nun schneidet sich dieser Kegel mit dem ihm unmittelbar vorhergehenden und dem ihm unmittelbar folgenden Kegel in zwei Hyperbeln, welche eine unendlich schmale Zone bestimmen, welche der Kegel mit der Evolutoidenfläche gemein hat. Längs dieser Zone haben beide Flächen, der Kegel und die Evolutoidenfläche gemeinschaftliche Tangentenebene und auf dieser Zone liegt das Curvenelement der Evolutoide, deren Schmiegungsebene senkrecht auf der Tangentenebene des Kegels steht. Diese Ebene steht daher auch senkrecht auf der Tangentenebene der Evolutoidenfläche und die Normale dieser ist also ihre Hauptnormale; daher ist die Evolutoide eine kürzeste Linie auf der Evolutoidenfläche. (Cap. IV, § 3 Anm.)

Jede Evolutoide ist daher auch eine Curve, längs welcher ein über die Evolutoidenfläche frei hingespannter Faden ohne Reibung im Gleichgewichte sich befindet. Befestigt man daher im Punkte *M* der Curve einen Faden und spannt ihn über den Kegel in *M* hin bis zu einem Punkte *N* der Hyperbel, welche die Charakteristik der Evolutoidenfläche ist, und längs welcher der Kegel diese Fläche berührt, und führt ihn dann frei über die Fläche hin, so zeichnet er auf dieser die durch *N* gehende Evolutoide der Curve *M*. Zieht man also nach allen Punkten *N* der Charakteristik solche Fäden, so erhält man alle Evolutoiden, welche demselben Winkel α entsprechen.

§ 6. Auf der Evolutoidenfläche giebt es zwei besonders ausgezeichnete Curven, nämlich die Curve der Scheitel und die

Enveloppe aller Hyperbeln. Keine von beiden ist eine Evolutoide. Um dies für die Curve der Scheitel zu erweisen, genügt es zu bemerken, dass zwei aufeinanderfolgende Linien MC, $M'C'$, welche die Punkte M, M' der Curve mit den ihnen entsprechenden Scheiteln C, C' verbinden, in den Schmiegungsebenen von M und M' liegen und sich also, wenn sie sich schnitten, nur auf der Durchschnittsebene dieser Ebenen, nämlich der Tangente schneiden könnten, was nicht möglich ist, da die Punkte M, M' verschiedene Punkte sind. Es berühren folglich die Linien MC, $M'C'$ keine Curve, also auch nicht die Curve der Scheitel, mithin ist diese auch keine Evolutoide. Blos der Fall, dass die Curve M eben ist, macht eine Ausnahme; dann ist nämlich die Curve der Scheitel eine Evolutoide; sie ist die Durchschnittslinie der Ebene der Curve mit der Evolutoidenfläche und um sie gruppiren sich die Evolutoiden symmetrisch zu beiden Seiten der Curvenebene, welche folglich eine Symmetrieebene der Evolutenfläche wird.

Um die Behauptung für die Enveloppe der Hyperbeln zu erweisen, ziehen wir von dem Punkte M nach irgend einem Punkte N der Hyperbel, welche den Durchschnitt des Kegels in M mit dem Kegel in M' darstellt, und verlängern diese Linie bis zum Durchschnitt N' mit der nächsten Hyperbel, in welcher sich der Kegel in M' mit dem folgenden schneidet. Dann ist NN' das Element einer Evolutoide. Ist nun aber N ein Punkt K der Enveloppe der Hyperbeln, so ist er Durchschnittspunkt jener beiden Hyperbeln und es fällt N' mit ihm zusammen und das Element NN' verschwindet. Eine Linie von M' nach dem nächsten Punkte K' der Enveloppe fällt daher nicht mit $M'K'$ zusammen, also mit MK nicht in dieselbe Ebene, also schneiden sich MK, $M'K'$ nicht und die Curve $KK'\ldots$ ist folglich keine Evolutoide, auch dann nicht, wenn die Curve M eben ist.

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ geht die Curve der Scheitel in die Curve der Krümmungsmittelpunkte und die Enveloppe der Hyperbeln in den Ort der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln über.

Es ist leicht, den Winkel dk zu bestimmen, welchen die Strahlen MC, $M'C'$, welche nach den Scheiteln zweier Hyperbeln gehen, zu bestimmen. Projicirt man nämlich die Linie $M'C'$, welche in der Schmiegungsebene des Punktes M' liegt, auf die Schmiegungsebene des Punktes M und ist $M'\gamma'$ diese Projection, so bilden diese

beiden Linien miteinander einen Winkel $d\sigma \cdot \sin\alpha$, eine dritte Linie $M'\gamma$, welche man durch M' parallel MC zieht, bildet mit $M'\gamma'$ den Contingenzwinkel $d\tau$ und mit $M'C'$ den gesuchten Winkel dk. Daher folgt aus der unendlich kleinen an der Kante $M'\gamma'$ rechtwinkligen Ecke dieser drei Linien:

$$dk^2 = d\tau^2 + d\sigma^2 \cdot \sin^2\alpha;$$

für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ erhält man hieraus den Lancret'schen Satz Cap. II, § 10.

Die Scheitelstrahlen MC erzeugen eine windschiefe Fläche, welche für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ in die Fläche der Hauptnormalen übergeht.

§ 7. Durch jeden Punkt der Evolutoidenfläche geht eine einzige Evolutoide, denn dieser Punkt liegt auf der Durchschnittslinie zweier Kegelflächen, also gehen nach ihm zwei Strahlen dieser Kegel, von denen der eine bereits genügt, um die Evolutoide vollständig zu bestimmen. Daher geht auch durch jeden Punkt der Scheitelcurve eine Evolutoide, daher wird diese von allen Evolutoiden getroffen. Nur wenn die Curve eben ist, ist die Scheitelcurve selbst Evolutoide und haben die übrigen mit ihr keinen Punkt gemein, sondern nähern sich ihr asymptotisch. Ebenso trifft jede Evolutoide die Enveloppe der Hyperbeln in einem Punkte.

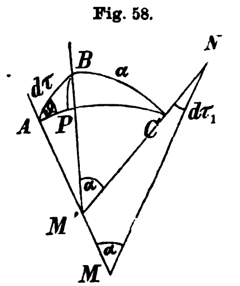
Wenn die Curve (M) die Fläche der Evolutoiden im Punkte M schneidet, so ist dieser Punkt ein Punkt der Durchschnittslinie des Kegels in M mit dem folgenden Kegel, nämlich ein Punkt der charakteristischen Hyperbel. Nun läuft die Ebene der Hyperbel mit der rectificirenden Ebene parallel und fällt also in diesem Falle mit der rectificirenden Ebene selbst zusammen; daher reducirt sich die Hyperbel auf die beiden Geraden, in welchen die rectificirende Ebene dieses Punktes den Kegel, dessen Mittelpunkt in ihm liegt, schneidet, nämlich auf die beiden Geraden, welche mit der Tangente von M gleiche Winkel α bilden. Dieser Punkt ist Scheitel und Mittelpunkt der Hyperbel zugleich, mithin geht die Curve der Scheitel durch ihn hindurch. Da die Tangenten der Evolutoiden die Strahlen des erzeugenden Kegels sind und alle durch diesen Punkt gehen, so gehört er zugleich allen Evolutoiden gemeinschaftlich an. In ihm stossen die beiden Flächenäste zusammen, welche den Ort der Evolutoiden bilden.

§ 8. Die sämmtlichen Evolutoiden einerseits und die sämmtlichen charakteristischen Hyperbeln andererseits bilden zwei Systeme

von Curven auf der Evolutoidenfläche, welchen hinsichtlich ihrer gegenseitigen Lage eine ausgezeichnete Eigenschaft zukommt. Zieht man nämlich längs einer Curve des einen Systems in allen Punkten, in welchen sie von den Curven des andern Systems geschnitten wird, Tangenten an die letzteren, so bilden diese eine abwickelbare Fläche. Ist nämlich die Curve eine aus dem System der Hyperbeln, so sind die Curven, welche sie schneiden, die Evolutoiden und ihre Tangenten sind die Strahlen des Erzeugungskegels, auf welchem die Hyperbel liegt, und dieser Kegel ist jene abwickelbare Fläche. Ist aber die Curve eine Evolutoide, so sind die Curven des andern Systems Hyperbeln und die Tangente an eine solche Hyperbel ist der Durchschnitt zweier Tangentenebenen der Kegel, welche sich in der Hyperbel schneiden. Diese Tangenten sind also die Durchschnitte einer continuirlichen Folge von Ebenen und erzeugen mithin eine abwickelbare Fläche. Wickelt man diese Fläche ab, so geht die Evolutoide in eine Gerade über, denn die abwickelbare Fläche berührt die Evolutoidenfläche längs dieser Evolutoide, und diese ist auf der Evolutoidenfläche kürzeste Linie; daher ist sie auch auf der umschriebenen abwickelbaren Fläche kürzeste Linie und geht mithin bei der Abwickelung dieser in eine Gerade über. Diese abwickelbare Fläche ist daher die rectificirende Fläche der Evolutoide und ihre Tangentenebenen stehen als rectificirende Ebenen senkrecht auf den Schmiegungsebenen der Evolutoide.

§ 9. Contingenz- und Schmiegungswinkel der Evolutoiden. Den Contingenzwinkel $d\tau_1$ einer Evolutoide haben wir bereits § 4 bestimmt; er ist nämlich $d\tau_1 = d\psi = d\tau \cdot \cos\vartheta$, wenn ϑ den Neigungswinkel der Schmiegungsebene der Evolutoide gegen die Schmiegungsebene der Curve bedeutet. Er ist unabhängig von α, mithin für alle Evolutoiden, die von verschiedenen Werthen von α bei demselben Werthe von ϑ entsprechen, derselbe. (S. Cap. IV, §11.) Den Schmiegungswinkel $d\sigma_1$ der Evolutoide erhalten wir aus dem sphärischen Dreieck ABC Fig. 58, in welchem $C = d\sigma_1$ ist, nämlich

Fig. 58.



$$d\sigma_1 = \frac{d\tau}{\sin\alpha} \cdot \sin\vartheta.$$

Das Verhältniss beider und mithin das Verhältniss der beiden ersten Krümmungen der Evolutoide ist demnach

$$\frac{d\tau_1}{d\sigma_1} = \frac{\sin\alpha}{tg\,\vartheta}.$$

Aus dem Contingenzwinkel und dem Schmiegungswinkel der Evolutoide erhält man für den Winkel dk_1 der ganzen Krümmung:

$$dk_1^2 = d\tau^2 \left\{ \cos^2\vartheta + \frac{\sin^2\vartheta}{\sin^2\alpha} \right\}.$$

Für das Bogenelement ds_1 der Evolutoide erhält man, wenn $MN = L$ gesetzt wird,

$$ds_1 = dL + ds\cos\alpha$$

und weil

$$L = \sin\alpha\cdot\frac{ds}{d\tau_1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\vartheta}\cdot\frac{ds}{d\tau},$$

so wird

$$ds_1 = \sin\alpha\, d\left(\frac{ds}{d\tau\cos\vartheta}\right) + ds\cos\alpha.$$

§ 10. Das Problem der Evolutoiden ist einer Umkehrung fähig. Man kann verlangen, die sämmtlichen Curven anzugeben, für welche eine gegebene Curve *(N)* Evolutoide ist. Solche Curven stehen zu der Evolutoide in einer ähnlichen Beziehung, wie die Evolventen zu der Evoluten, daher mögen sie Evolventoiden heissen. Da die Tangente der Evolutoide mit der Tangente der Curve, der sie als Evolutoide angehört, einen constanten Winkel bildet, so sieht man ein, dass die Evolventoiden einer Curve alle auf der Tangentenfläche derselben liegen und diejenigen Curven sind, welche die Tangenten unter constantem Winkel α schneiden.* So wie wir aber bei den Evolventen zwischen Filarevolventen und Planevolventen unterschieden haben, so macht sich auch hier ein analoger Unterschied geltend. Die Curven, die wir eben Evolventoiden nannten, entsprechen den Filarevolventen. Nun bilden die Schmiegungsebenen der Planevolventen mit den Schmiegungsebenen der primitiven Curve rechte Winkel, daher wird man passend die Curven, deren Schmiegungsebenen mit den Schmiegungsebenen einer gegebenen Curve constanten Winkel bilden**, Planevolventoiden nennen und jene ersteren Evolventoiden mit dem Namen der Filarevolventoiden belegen. Wir wollen hier die Theorie dieser von einer Curve abgeleiteten Curvensysteme nicht weiter verfolgen.

* Cf. Molins, sur les trajectoires qui coupent sous un angle donné les tangentes à une courbe à double courbure. Journ. des Mathém. T.VIII, p. 132.

** Cf. Molins, Note sur les courbes dont les plans osculateurs font un angle constant avec une surface dévéloppable sur laquelle elles sont tracées. Journ. des Mathém. T. XII, p. 394.

Schlusswort.

In der vorliegenden Schrift ist die Betrachtung der Curven doppelter Krümmung bis zu den Elementen der vierpunktigen Berührung ausgeführt. Die Bestimmung der Schmiegungskugel, des Schmiegungsrotationskegels und der Schmiegungskegelloxodrome gehören diesem Gebiete an. Es möge mir gestattet sein, auf einige weitere wünschenswerthe Untersuchungen im Sinne der rein geometrischen Behandlung hinzudeuten, die einen Fortschritt der Theorie bezeichnen.

1. Eine Fläche zweiter Ordnung ist im Allgemeinen durch neun Punkte bestimmt. Die geometrische Construction einer Schmiegungsfläche zweiter Ordnung, welche eine Curve doppelter Krümmung neunpunktig berührt, ist bei den ausgebildeten Mitteln der synthetischen Geometrie ein lösbares Problem. Dasselbe zerfällt in viele Einzelprobleme, wie die Bestimmung des Mittelpunktes und der Hauptaxen, der Kreisschnitte, Nabelpunkte, der Kriterien über die Art der Fläche, insbesondere in welchen Fällen dieselbe geradlinig oder doppeltkrumm ist u. s. w. Dahin gehört auch die Untersuchung der Schaar Flächen zweiter Ordnung, welche die Curve achtpunktig berühren, nebst den Orten ihrer Mittelpunkte und Hauptaxen, sowie die der doppelten und mehrfachen Schaaren der in niedrigerer Anzahl von Punkten berührenden Flächen.

2. Die weitere Ausführung von Studien specieller Curvengattungen in rein geometrischem Sinne ist ein Berdürfniss der Curventheorie; sie würde betreffen die Curven constanter Krümmung, constanter Schmiegung, constanter sphärischer Torsion, von bestimmten Relationen zwischen Krümmung und Schmiegung u. s. w.*

* Sehr werthvolle analytische Arbeiten liegen bereits hier vor, wie: Hoppe, zum Molins'schen Problem (Archiv f. Mathem. u. Physik. 2. Reihe, Bd. 2, S. 269); Curven von constanter Krümmung, Torsion, Totalkrümmung und Krümmungsverhältniss (ebendas. 2. Reihe, Bd. 11, S. 101—112). — Molins, de la détermination, sous forme intégrable, des équations des courbes, dont le rayon de courbure et le rayon de torsion sont liés par une relation donnée quelconque (Journ. de math. pures et appl. Sér. 2me, T. 19, p. 425—451). — Lyon, sur les courbes à torsion constante (Thèse pr. à la fac. des sc. de Paris, Paris 1890).

3. Eine besondere Bearbeitung der Erzeugung der Curven, theils als Orte eines Punktes, theils als Orte einer Ebene, welche zwei Bedingungen genügen, in Verbindung mit einer systematischen Bildung von Aufgaben hierüber möchte ich als einen Fortschritt der Curventheorie bezeichnen. Schon eine Sammlung vorhandener Aufgaben nebst ihren rein geometrischen Lösungen würde von hohem Werthe sein.

4. In der Theorie der ebenen Curven sind Untersuchungen über die Kette der Evoluten vorhanden, insbesondere darüber, in welchen Fällen die Evolute einer Curve, die Evolute dieser Evolute u. s. f. in gewissen Verwandtschaften, der Congruenz oder Aehnlichkeit, stehen. Für die Curven doppelter Krümmung sind ähnliche Untersuchungen über die Kette einer Curve, der Curve deren Krümmungsmittelpunkte, der Curve der Krümmungsmittelpunkte dieser u. s. f. oder über die einer Curve und der successiven Curven deren Schmiegungskugelmittelpunkte möglich und theilweise analytisch in Angriff genommen.* Eine geometrische Theorie solcher Forschungen wäre gewiss von Bedeutung für die Wissenschaft.

5. Will man Anwendungen der Curventheorie finden, so bietet die Geometrie der Bewegung das ausgiebigste Feld. Wenn ein unveränderliches räumliches System die allgemeinste Art der Bewegung, nämlich eine Windungsbewegung um eine continuirlich wechselnde Axe besitzt, so bilden die Bahnen der Systempunkte eine Familie von Curven doppelter Krümmung, welche continuirlich in einander transformirbar sind. In dieser Familie giebt es ausgezeichnete Individuen und ausgezeichnete Schaaren, wie es in der grossen Gruppe möglicher Windungsbewegungen selbst je nach der Art des Gesetzes der Folge ihrer Axen und Windungsparameter individuelle Bewegungen und Bewegungsgruppen von hervorragender Bedeutung giebt.

Vielleicht ist es manchem Leser meiner Schrift nicht unerwünscht, dass ich auf die hier berührten Probleme hingedeutet habe.

---

* Vgl. Hoppe, das Aoust'sche Problem in der Curventheorie (Archiv f. Mathem. u. Physik, Bd. 66, S. 386).